




普通高校“十一五”规划教材

赵 宇 杨 军 马小兵 编著

可靠性数据分析教程

 北京航空航天大学出版社



普通高校“十一五”规划教材

可靠性数据分析教程

赵 宇 杨 军 马小兵 编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书在跟踪国内外可靠性数据分析理论和方法发展的基础上,结合国内可靠性工程的实践经验,从工程角度出发,对可靠性数据分析的理论、方法和应用,进行了系统的整理、编写。

本书共分3篇19章。在阐述可靠性数据分析所需的基本概念与统计学基础知识的基础上,讲述了针对单元产品的可靠性评估,包括参数方法、非参数方法、无失效数据分析与 Bayes 方法等;最后全面阐述了系统可靠性综合评估方法,包括系统可靠性建模、可靠性增长数据分析、系统可靠性评估的经典统计方法与 WCF 方法。

本书着重强调了可靠性数据分析理论方法与工程实际的紧密结合,力求简洁实用,可供高等院校本科生和研究生学习使用,也可供工程技术人员学习与参考。

图书在版编目(CIP)数据

可靠性数据分析教程/赵宇,杨军,马小兵编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2009.6

ISBN 978-7-81124-554-7

I. 可… II. ①赵…②杨…③马… III. 可靠性数据—分析—高等学校—教材 IV. TB114.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 038711 号

可靠性数据分析教程

赵宇 杨军 马小兵 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail: bhp@263.net

印刷有限公司印装 各地书店经销

※

开本:787×960 1/16 印张:21.75 字数:487 千字

2009 年 6 月第 1 版 2009 年 6 月第 1 次印刷 印数:3 000 册

ISBN 978-7-81124-554-7 定价:36.00 元

前 言

可靠性数据分析是贯穿于产品研发、试验、生产、使用和维修全过程的一项基础性工作,在可靠性工程中始终发挥着重要作用。因此,编写本书有着重要的价值。

本书从工程角度出发,在讲清楚基础概念的基础上,力求简洁实用,同时涵盖国内外在该领域的重要进展。全书按照数据产生—收集—分析—单元可靠性评估—系统可靠性评估的评估过程编写。本书共分3篇19章。第1篇包括第1~5章,介绍可靠性的基本概念、可靠性数据的收集方法与常用的寿命分布等。第2篇包括第6~15章,讲述针对单元产品的可靠性评估:第6~8章介绍连续性分布产品的可靠性评估,包括指数分布、威布尔分布、正态分布与对数正态分布;第9章介绍可靠性数据分析中常用的分布检验方法;第10章介绍针对离散产品的可靠性数据分析;第11章介绍可靠性数据分析的非参数方法;第12章分析无失效数据的可靠性;第13章介绍加速寿命试验的数据分析;第14章扼要介绍耐久试验数据分析与寿命评估;第15章介绍可靠性评估的贝叶斯方法。第3篇包括第16~19章,全面阐述系统可靠性综合评估与数据分析:第16章介绍系统可靠性模型;第17章介绍针对可靠性增长试验的数据分析;第18章介绍系统可靠性评估的经典统计方

法;第19章介绍系统可靠性评估的WCF方法。为便于理解和应用,各章节均有例题和习题,书后附有数据分析时常用的表格。

本书第1~5章由赵宇教授编写,第6~13章与第15~19章及附录由杨军讲师编写,第14章及习题由马小兵讲师编写。全书由赵宇教授主编,韩於羹教授主审。在本书编写过程中,得到了北京航空航天大学贺国芳教授、许海宝教授、黄敏副教授,中国科学院数学与系统科学研究院于丹研究员、北京大学概率统计系房祥忠教授的指导和帮助,李进、洪东跑、熊小云、申丽娟等同学为本书部分章节的修改做了很多工作,在此一并致谢。

本书可供高等院校本科生和研究生学习使用,也可供工程技术人员学习与参考。由于作者水平有限,若书中存在缺点和错误,望读者和专家不吝指正。

作 者

2009年3月

目 录

第 1 篇 可靠性数据分析基础

第 1 章 绪 论	1
1.1 可靠性数据分析的目的和意义	1
1.1.1 什么是可靠性数据分析	1
1.1.2 可靠性数据分析的目的和任务	2
1.1.3 可靠性数据分析的工程意义	2
1.2 可靠性数据分析的内容和方法	3
1.2.1 可靠性数据分析的主要内容	3
1.2.2 可靠性数据分析的基本方法	5
习 题	6
第 2 章 常见的可靠性指标及其概率解释	7
2.1 可靠度和可靠寿命	7
2.2 失效分布函数和平均寿命	8
2.2.1 失效分布函数	8
2.2.2 平均寿命	9
2.3 失效率	10
2.3.1 失效率的概念	10
2.3.2 失效率的性质	11
2.3.3 失效率反映的产品故障规律	12
2.4 维修性数量指标	13
习 题	14
第 3 章 可靠性数据的收集	16
3.1 可靠性数据的来源及特点	16
3.1.1 收集可靠性数据的目的	16
3.1.2 可靠性数据的来源	16
3.1.3 可靠性数据的特点	17
3.2 试验数据和现场数据	17

3.2.1	试验数据	17
3.2.2	现场数据	19
3.3	可靠性数据的收集要求和程序	21
3.3.1	数据的需求	21
3.3.2	数据的质和量	21
3.3.3	可靠性数据的收集程序和方法	22
3.4	故障数据的判定及记录	24
3.4.1	故障及关联故障	24
3.4.2	故障模式及失效机理	25
3.4.3	故障影响及等级划分	26
3.5	可靠性数据的利用及效果	27
习 题		28
第4章 可靠性数据的初步整理分析		29
4.1	直方图	29
4.2	样本的经验分布函数	33
4.2.1	定 义	33
4.2.2	经验分布函数的计算	33
4.3	随机截尾寿命试验的可靠度函数计算	36
4.3.1	用残存比率法计算产品的可靠度	36
4.3.2	用平均秩次法计算经验分布函数	39
习 题		41
第5章 常用的寿命及故障分布		43
5.1	二项分布及有关分布	44
5.1.1	二项分布	44
5.1.2	超几何分布	45
5.1.3	负二项分布	45
5.2	指数分布及有关分布	46
5.2.1	泊松分布	46
5.2.2	指数分布	46
5.2.3	伽马分布	49
5.3	正态分布及有关分布	50
5.3.1	正态分布	50
5.3.2	对数正态分布	53
5.4	威布尔分布	54

5.4.1	推导及物理背景	54
5.4.2	性 质	55
5.5	混合分布与竞争性故障模型	58
5.5.1	混合分布	58
5.5.2	竞争性故障模型	60
5.6	统计量的分布	62
5.6.1	顺序统计量的分布	62
5.6.2	样本经验分布函数 $F_n(t)$ 的分布	64
5.6.3	各种截尾样本的联合分布	64
5.6.4	常用的线性型统计量的分布	65
习 题		67

第 2 篇 单元可靠性评估

第 6 章	指数分布的统计推断	69
6.1	指数分布参数的极大似然估计	69
6.1.1	单参数指数分布的极大似然估计	69
6.1.2	两参数指数分布的极大似然估计	76
6.2	指数分布参数的区间估计	78
6.2.1	定数截尾试验子样的参数估计	78
6.2.2	定时截尾试验子样的参数估计	80
6.2.3	定时间隔测试试验子样的参数估计	81
6.2.4	两参数指数分布的区间估计	82
习 题		83
第 7 章	威布尔分布的统计推断	85
7.1	参数的点估计	85
7.1.1	参数的极大似然估计	85
7.1.2	定数截尾试验下参数的线性估计	86
7.1.3	参数的最小二乘估计	91
7.1.4	威布尔分布的图估计	92
7.2	参数的区间估计	103
7.2.1	基于线性估计的区间估计	103
7.2.2	基于极大似然估计的区间估计	104
习 题		108

第 8 章 正态分布与对数正态分布的统计推断	109
8.1 参数的点估计	109
8.1.1 参数的极大似然估计	109
8.1.2 定数截尾情形下参数的线性估计	109
8.1.3 参数的最小二乘估计	112
8.1.4 参数的图估计——正态概率纸与对数正态概率纸	114
8.2 参数的区间估计	117
8.2.1 正态分布的参数区间估计	117
8.2.2 对数正态分布的参数区间估计	120
习 题	121
第 9 章 分布的拟合优度检验	122
9.1 皮尔逊 χ^2 检验	122
9.2 柯尔莫哥洛夫检验	126
9.2.1 完全样本情形的柯尔莫哥洛夫检验	126
9.2.2 截尾样本情形的柯尔莫哥洛夫检验	127
9.3 指数分布检验	131
9.3.1 F 检验法	132
9.3.2 χ^2 检验法	133
9.4 威布尔分布检验	134
9.4.1 F 检验法	134
9.4.2 χ^2 检验法	136
9.5 正态分布检验	137
9.5.1 Shapiro – Wilk 检验	137
9.5.2 偏峰度检验	138
9.6 分布的似然比检验	139
9.6.1 区分正态分布和指数分布的检验	140
9.6.2 区分对数正态分布和威布尔分布的检验	142
习 题	144
第 10 章 几种离散型分布的统计推断	145
10.1 二项分布的统计分析	145
10.1.1 参数 p 的估计	145
10.1.2 可靠度的区间估计	146
10.2 超几何分布的统计分析	148
10.3 泊松分布的统计分析	148

习 题	149
第 11 章 非参数统计推断	150
11.1 可靠度的非参数估计	150
11.1.1 贝塔分布法	150
11.1.2 F 分布法	151
11.2 分布分位数的非参数估计	152
11.2.1 分位数的点估计	152
11.2.2 分位数的区间估计	153
11.3 Bootstrap 方法	154
11.3.1 Bootstrap 方差估计	155
11.3.2 Bootstrap 区间估计	155
11.4 估计生存函数的非参数方法	156
11.4.1 寿命表法	156
11.4.2 乘积限估计(PL 估计)	157
习 题	159
第 12 章 无故障数据分析	160
12.1 指数分布下无故障数据的分析	161
12.2 威布尔分布下无故障数据的分析	162
12.2.1 形状参数已知时的可靠性分析	162
12.2.2 形状参数未知时的可靠性分析	164
12.3 正态分布和对数正态分布下无故障数据的分析	166
12.3.1 正态分布	166
12.3.2 对数正态分布	167
12.4 分布未知时无故障数据的分析	169
习 题	170
第 13 章 加速寿命试验及其统计分析	171
13.1 基本概念和基本模型	171
13.1.1 加速寿命试验的类型	171
13.1.2 加速模型与加速系数	172
13.2 恒定应力加速寿命试验	176
13.2.1 指数分布场合下恒加试验数据的统计分析	176
13.2.2 威布尔分布场合下恒加试验数据的统计分析	184
13.2.3 对数正态分布场合下恒加试验数据的统计分析	187
13.3 步进应力加速寿命试验	188

13.3.1	指数分布场合下步加试验数据的统计分析	189
13.3.2	威布尔分布场合下步加试验数据的统计分析	190
13.3.3	对数正态分布场合下步加试验数据的统计分析	192
习 题		194
第 14 章	耐久试验数据分析与寿命评估	196
14.1	极小样本情形下寿命分析的工程经验法	196
14.2	参数蜕化情况下的使用寿命分析	198
14.3	裂纹扩展寿命分析	200
14.4	疲劳寿命分析	202
习 题		203
第 15 章	可靠性评估的 Bayes 方法	205
15.1	Bayes 统计简介	205
15.1.1	Bayes 统计的基本出发点	205
15.1.2	先验分布与后验分布	206
15.1.3	Bayes 推断	212
15.2	可靠性的 Bayes 评估	216
15.2.1	二项分布的 Bayes 估计	216
15.2.2	指数分布的 Bayes 估计	217
15.2.3	系统可靠性 Bayes 评估的基本流程	218
习 题		219

第 3 篇 系统可靠性评估

第 16 章	系统可靠性模型	220
16.1	串联系统	220
16.2	并联系统	221
16.3	表决系统	221
16.4	储备系统	222
16.5	单调系统	223
16.6	网络系统	225
习 题		225
第 17 章	可靠性增长数据的分析	227
17.1	可靠性增长的趋势检验	227
17.1.1	趋势检验的图示法	227

17.1.2	趋势检验的 Laplace 法	228
17.2	可靠性增长的 Duane 模型	230
17.2.1	Duane 模型的数学描述	230
17.2.2	Duane 模型参数的图估计	231
17.2.3	Duane 模型参数的最小二乘估计	231
17.2.4	模型的拟合优度检验	232
17.2.5	多台系统同步增长的情形	233
17.3	可靠性增长的 AMSAA 模型	234
17.3.1	AMSAA 模型的数学描述	234
17.3.2	定数截尾试验	234
17.3.3	定时截尾试验	236
17.3.4	模型的拟合优度检验	237
17.4	可靠性增长的其他常用模型	238
17.4.1	Gompertz 模型	238
17.4.2	Lloyd - Lipow 模型	239
17.4.3	EDRIC 模型	240
习 题	242
第 18 章	系统可靠性评估的经典统计方法	243
18.1	成败型数据情形下系统的可靠性	243
18.1.1	成败型数据情形下系统可靠性的精确置信限	244
18.1.2	成败型数据情形下系统可靠性的近似置信限	247
18.2	单元寿命服从指数分布情形下系统的可靠度	249
18.2.1	有替换定总时寿命试验	250
18.2.2	无替换定数截尾寿命试验	251
18.3	混合数据情形下系统的可靠度	253
18.3.1	MMLII 法	253
18.3.2	不同分布类型试验数据的转换	254
习 题	255
第 19 章	系统可靠性综合评估的 WCF 法	256
19.1	预备知识	256
19.1.1	累量及其性质	256
19.1.2	分位点的 Cornish - Fisher 展开	257
19.1.3	Fiducial 方法	258
19.2	系统可靠性综合评估的框架	258

19.2.1	综合评估的基本模型	258
19.2.2	系统可靠性评估 CF 方法	260
19.2.3	系统可靠性评估 WCF 方法	260
19.3	设备级数据处理方法	262
19.3.1	成败型设备试验数据的处理方法	262
19.3.2	指数型设备试验数据的处理方法	262
19.4	系统可靠性评估部分 WCF 方法	263
19.4.1	系统可靠性综合评估部分 WCF(1)方法	263
19.4.2	系统可靠性综合评估部分 CF 方法	265
19.4.3	系统可靠性综合评估部分 WCF(2)方法	265
习 题		267
附录 A	统计学的基本知识	269
A.1	样本及其统计量	269
A.1.1	总体、样本、简单随机样本	269
A.1.2	统计量和样本矩	269
A.1.3	顺序统计量	270
A.2	点估计	270
A.2.1	矩估计	271
A.2.2	极大似然估计	271
A.2.3	图估计	272
A.2.4	最小二乘估计	272
A.3	估计量的特征及评价标准	275
A.3.1	无偏估计	275
A.3.2	最小方差无偏估计	275
A.3.3	最小均方误差估计	276
A.3.4	相合估计	276
A.3.5	最优线性无偏估计	276
A.3.6	加权最小二乘估计	277
A.3.7	最优线性不变估计	278
A.3.8	简单线性无偏估计	279
A.3.9	简单线性不变估计	281
A.4	区间估计	281
附录 B	相关计算用表	283
附表 B.1	最优线性估计用表(极值分布、威布尔分布)	283

附表 B. 2	简单线性无偏估计表(极值分布、威布尔分布)	289
附表 B. 3	最好线性无偏估计表(正态分布、对数正态分布)	292
附表 B. 4	简单线性无偏估计表(正态分布、对数正态分布)	298
附表 B. 5	W 分布的分位数表	302
附表 B. 6	V 分布的分位数表	304
附表 B. 7	超几何分布单侧置信下限表	306
附表 B. 8	泊松分布均值的置信区间	307
附表 B. 9	柯尔莫哥洛夫检验的临界值表	308
附表 B. 10	经验分布 $F_n(t_i)$ 的置信限	317
附表 B. 11	计算统计量 Z 必需的系数 $\alpha_{k,n}$	321
附表 B. 12	统计量 Z 的 p 分位数 Z_p	324
附表 B. 13	经验修正系数 K, K_1, K_0 表	325
附表 B. 14	相关系数 $\rho=0$ 时, 经验相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $\hat{\rho}_\alpha$ 表	326
附表 B. 15	Cramer - Von Mises 统计量 C_M^2 的临界值 $C_{M,\alpha}^2$ 表	327
参考文献		328

第 1 篇 可靠性数据分析基础

第 1 章 绪 论

1.1 可靠性数据分析的目的和意义

1.1.1 什么是可靠性数据分析

可靠性是产品在规定的时间内和规定的条件下,完成规定功能的能力,而这种能力的表示通常归结于一个概率值。对产品的可靠性仅进行一般意义上的定性分析远远不能满足工程需求,必须进行可靠性的定量分析。事实上,当给出可靠性的各种定量表示后,就有可能对产品的可靠性提出明确而统一的要求,即产品的各种可靠性指标要求。这包括两方面的含义:其一是根据这种统一的要求及产品的需要和可能,在设计 and 生产时就考虑可靠性因素,利用各种方法分析得出结论,如利用 FMECA、FTA、可靠性预计和分配等,这是演绎的方法;其二是当产品生产出来以后,为获知产品的可靠性,可按一定的试验方法进行试验,根据观测数据评价它们的可靠性,这是归纳的方法,可靠性数据分析就是从这个角度进行研究。

可靠性的定量表示有其自身的特点。首先它很难只用一个量来表示,实际上,可靠性是产品全部的可靠性数量指标的总称。在不同的场合,应使用不同的数量指标来表示产品的可靠性。如产品从开始使用到某一时刻 t 这段时间,维持规定功能的能力就可用一个称为可靠度的量来表示,这一量愈大,表示产品完成规定功能的能力愈强,即产品愈可靠。因此,可靠度可作为表示产品可靠性的一个数量指标。但是并非任何场合使用这个指标都方便,对元器件来说,往往用寿命这个指标更直观,即产品从开始使用到丧失规定功能这段时间的长短;而对一个可修复的产品,则关心它两次故障间工作时间有多长。有时人们需要了解产品在某个瞬间的失效率有多大。当然还有许多其他可靠性指标,所有这些都有必要一一给予定量表示。

可靠性定量表示的另一特点是它的随机性。对一个特定的产品来说,在某个特定时刻只能处于故障或不故障这两种状态,不存在任何其他的中间状态,因此产品的规定功能或判断产

品是否有故障的技术指标必须十分明确。由概率论可知,在一定条件下可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。“一个产品在规定的时间内不故障”就是一个随机事件,随机事件的发生与否带有随机性,因此在讨论可靠性的数量特征时,就必须使用概率论和数理统计的方法,确定产品的可靠性数量指标,最后都归结为统计推断问题。

需要注意,在本书中经常用到“单元”和“系统”两个词汇。一般来说,“单元”是指作为单独研究或单独试验对象的任何元器件、零件,甚至一台完整的设备;而“系统”是指设备、技能以及能担当或保障某项任务执行的各因素的总和。本书在使用“单元”时,是泛指的词,它可以指系统、设备,也可以指组成系统或设备的单元;而在使用“系统”时,不仅包括了组成系统的各单元,还包括了各单元间的可靠性结构。

综上,可靠性数据分析是通过收集系统或单元产品在研制、试验、生产和维修中所产生的可靠性数据,并依据系统的功能或可靠性结构,利用概率统计方法,给出系统的各种可靠性数量指标的定量估计。它是一种既包含数学和可靠性理论,又包含工程分析处理的方法。

1.1.2 可靠性数据分析的目的和任务

可靠性数据分析贯穿于产品研制、试验、生产、使用 and 维修的全过程,进行可靠性数据分析的目的和任务也是根据在产品研制、试验、生产、使用和维修等过程中所开展的可靠性工程活动的需求而决定的。在研制阶段,可靠性数据分析用于对所进行的各项可靠性试验的试验结果进行评估,以验证试验的有效性。如进行可靠性增长试验时,应根据试验结果对参数进行评估,分析产品的故障原因,找出薄弱环节,提出改进措施,以使产品可靠性得到逐步增长。研制阶段结束进入生产前,应根据可靠性鉴定试验的结果,评估其可靠性水平是否达到设计的要求,为生产决策提供管理信息。在投入批生产后,应根据验收试验的数据评估可靠性,检验其生产工艺水平能否保证产品所要求的可靠性水平。在投入使用的早期,应特别注意对于使用现场可靠性数据的收集,及时进行分析与评估,找出产品的早期故障及其主要原因,进行改进或加强质量管理。加强可靠性筛选,可大大降低产品的早期故障率,提高产品的可靠性。使用中应定期对产品进行可靠性分析和评估,对可靠性低下的产品进行改进,使之达到设计所要求的指标。

1.1.3 可靠性数据分析的工程意义

随着可靠性、维修性工作的深入开展,可靠性数据分析工作越来越显示出其重要的价值和作用。在现代武器装备的质量中,可靠性占有突出的重要地位。可靠性只能通过设计与生产过程的可靠性活动获得,它是可靠性设计、可靠性试验和可靠性管理的结果。可靠性数据分析给可靠性设计和可靠性试验提供了基础,为可靠性管理提供了决策依据。可靠性数据分析的任务是定量评估产品可靠性,由此提供的信息,将作为“预防、发现和纠正可靠性设计以及元器

件、材料和工艺等方面缺陷”的参考,这是可靠性工程的重点,因而,借助有计划、有目的地收集产品寿命周期各阶段的数据,经过分析,发现产品可靠性的薄弱环节,进行分析、改进设计,可以使产品的质量与可靠性水平不断改进和提高。所以可靠性数据的收集和分析在可靠性工程中具有重要地位。

在产品的寿命周期中,可靠性数据的收集与分析伴随着各阶段可靠性工程活动而进行。在工程研制阶段,需要收集和分析同类产品的可靠性数据,以便对新产品的的设计进行可靠性预测,这种预测有利于进行方案的对比和选择。设计阶段的可靠性研究和试验产生的数据用于分析产品的初始可靠性、故障模式和可靠性增长规律,并为产品的改进和定型提供科学的依据。生产阶段为对产品的质量进行控制,必须定期进行抽样检查与试验,来确定产品合格与否,从而指导生产,保证质量。由于生产阶段产品数量和试验数量大大增加,此时所进行的可靠性数据的分析和评估,反映了产品的设计和制造水平;而使用阶段收集和分析的可靠性数据,对产品的设计和制造的评价最权威,因为它反映的使用及环境条件最真实,参与评估的产品数量较多,其评估结果反映了产品趋向成熟期或到达成熟期时的可靠性水平,是该产品可靠性工作的最终检验,也是今后开展新产品的可靠性设计和改进原产品设计的最有价值的参考。由此看来,可靠性数据分析在可靠性工程各项活动中是一项基础性的工作,始终发挥着重要作用。

1.2 可靠性数据分析的内容和方法

1.2.1 可靠性数据分析的主要内容

在工程中,进行可靠性数据分析的主要内容有以下几点。

(1) 单元可靠性的数据分析和可靠性评估

单元是系统的基础,同时,系统也可看作一个单元。因此,要进行系统的数据分析和可靠性评估,首先要进行单元的可靠性数据分析。其基本出发点是,根据单元的试验数据,运用各种统计推断的方法,给出单元的可靠性水平的定量估计;若单元的可靠性符合某种分布规律(如二项、指数、正态、对数正态、威布尔分布等),应给出分布参数的估计。这里有一点须注意,单元的寿命试验数据往往是截尾样本,不是完全样本,其统计推断比较困难。

(2) 系统可靠性评估与综合

对系统可靠性的评估,如果像单元一样,根据系统的试验数据来进行统计推断,在工程上会存在很大困难,甚至是不可能的。因为在工程中,系统试验一般符合金字塔式程序,如图1.1所示。

由此可见,一般“级”越高,试验的工程难度越大,所需费用越高,因此“级”越高,试验数量越少,全系统的试验数量就更少。要评定系统可靠性,必然面临信息量不足的问题。这就需要

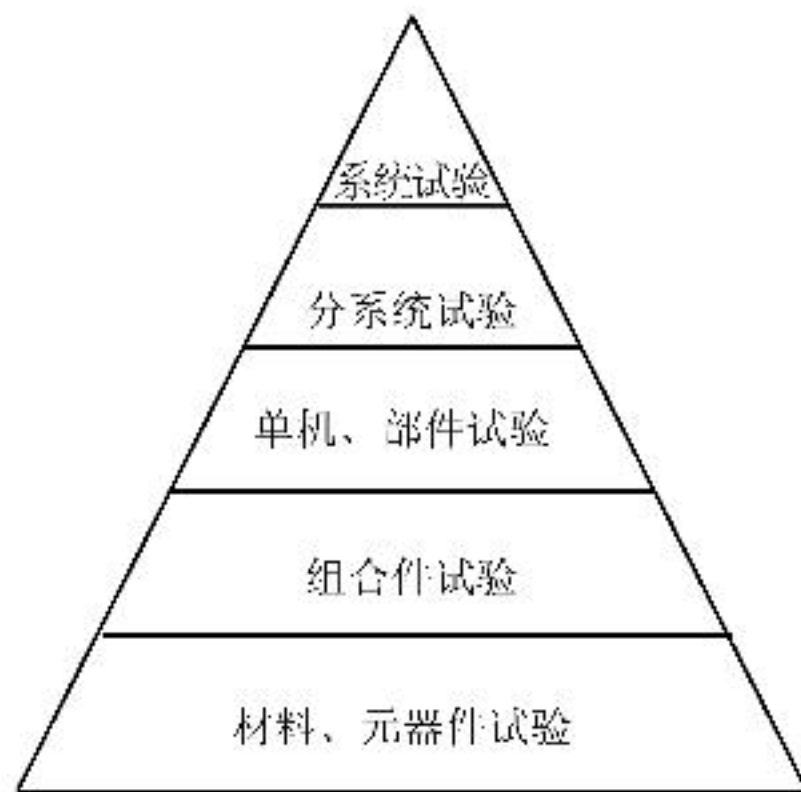


图 1.1 金字塔式试验程序

在评定系统可靠性时,充分利用系统以下各级的可靠性数据,以扩大信息量;另一方面,若能利用系统以下各级信息,就有可能使全系统一级的试验数量减少,从而节省产品的研制经费,缩短研制周期。

为解决上述问题,就应进行系统可靠性评估与综合。它实质上是根据已知的系统可靠性结构(如串联、并联、混联、表决、树形及网络系统),利用系统以下各级的试验信息,自下而上直到全系统逐级确定其可靠性的估计。

(3) 机械可靠性数据分析和评估

机械可靠性主要是研究在应力强度模型下,产品的可靠性分析及评估。因此,机械可靠性数据分析与评估的主要问题是根据应力强度模型和试验信息,确定机械结构可靠性估计值或估计区间。

(4) 可修系统的可靠性数据分析和可靠性评估

在工程中,产品发生故障后一般有可修与不可修之分。对于不可修产品,或是可修产品故障后进行完全修复(即通常所说“好如新”)的情况,其数据分析和评估可使用单元或系统可靠性数据分析和评估的方法。但对于可修产品故障后进行基本修复的情况,产品在修复后恢复了正常功能,但其状态不一定与新产品完全一样。有些产品检修时消除了薄弱环节,随着检修次数增加,工作寿命在逐渐延长;有些产品随着检修次数的增加,工作寿命在逐渐缩短。这时,其故障数据就不能认为是来自同一母体的随机样本,也就是说它们是变母体的数据,当然也就不能使用传统(同母体)的方法进行分析处理。因此,应针对可修系统变母体故障数据的特点进行分析,确定可修系统的故障过程模型,然后寻求可修系统的故障数据处理和系统可靠性评估的有效方法,分析可修系统的可靠性特征,估算其可靠性指标,评估其寿命情况。

(5) 单元及系统的可用性评估

当单元或系统发生故障后,如果可进行维修,使之恢复功能,则产品的质量特征既涉及失

效特征又涉及维修特征,综合两者的质量指标即是可用性。可修单元或系统的优劣常用稳态可用性来衡量。一般常见的维修分布有指数分布、伽马分布和对数正态分布等。这样,维修分布和各种失效分布组合起来就形成了各种各样的可用性问题。目前,有关单元的可用性评估问题,主要研究伽马失效/伽马维修、指数失效/对数正态维修的情况,系统则主要研究由指数失效/指数维修的单元组成的系统的可用性评估问题。

1.2.2 可靠性数据分析的基本方法

1. 寿命分布分析与统计推断

从可靠性数据的统计分析中找出产品寿命分布的规律,是分析产品寿命和故障、预测故障发展、研究失效机理及制定维修策略的重要手段。根据所收集的产品数据,使用数理统计方法得到产品的寿命分布,将其与故障发生的现象、原因进行对比,即可判断寿命分布的合理性。

确定了产品的寿命分布,就可根据数理统计的基本原理,对不同产品的可靠性数据进行参数估计,然后再由寿命分布和可靠性参数的关系,估计可靠性设计和分析中所需的各项参数。可靠性参数分析流程图如图 1.2 所示。

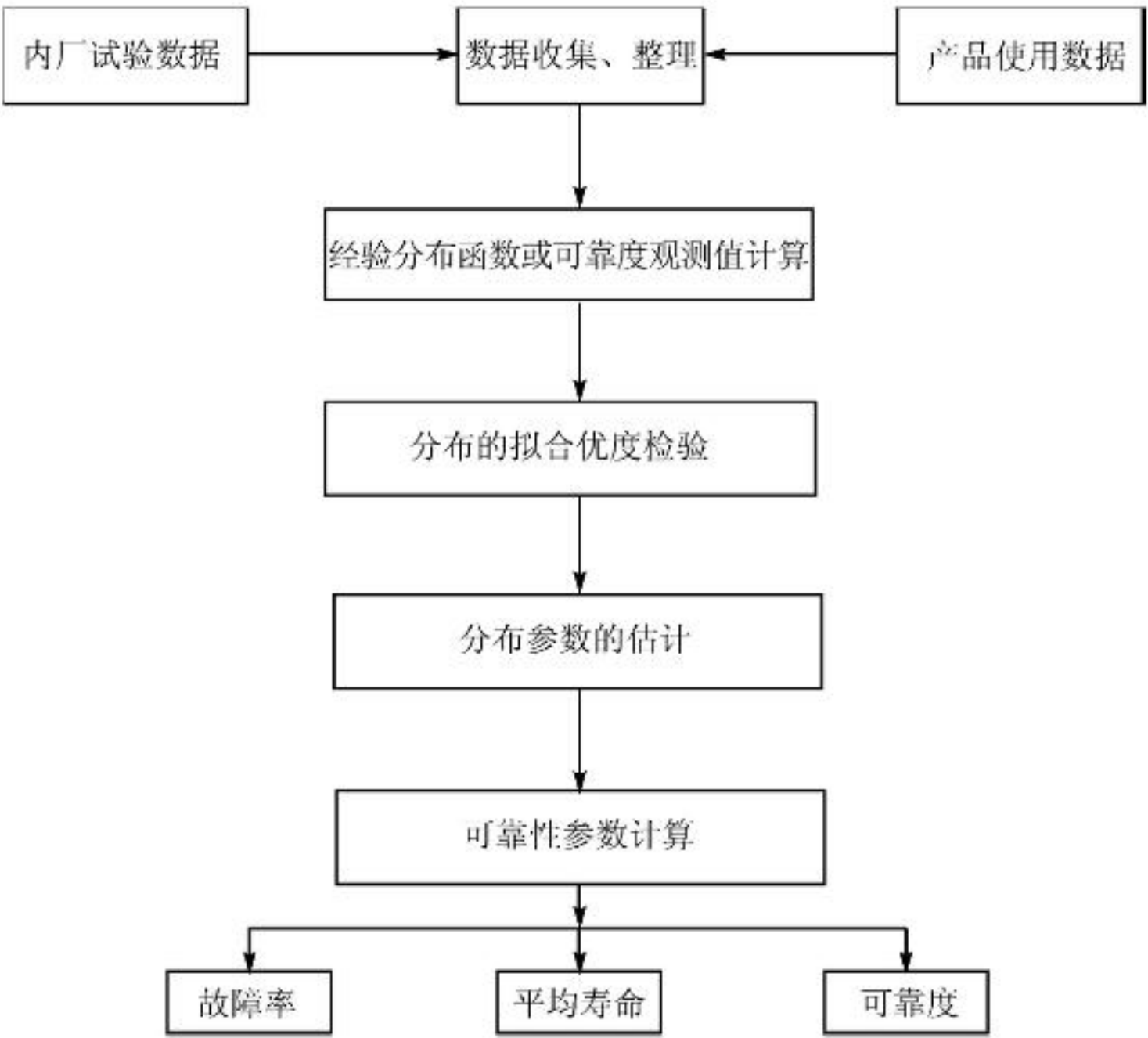


图 1.2 可靠性参数分析流程图

2. Bayes 分析

Bayes 分析方法也是可靠性数据分析的一种常用方法,由于 Bayes 方法对先验信息的利用,使得该方法在某些特定情形下具有无法替代的优点,从而使该方法在可靠性数据分析中获得了持久的生命力。Bayes 方法的关键是选取合理的先验分布。

3. 随机过程分析

随机过程分析是可修系统的可靠性数据分析和可用性数据分析的重要手段。通常,使用马尔可夫过程或泊松过程作为描述可修系统的数学模型,在此基础上发展了变母体的可靠性统计方法。

习 题

- 1.1 什么是可靠性? 什么是可靠性数据分析?
- 1.2 简述可靠性数据分析的重要意义。
- 1.3 简述可靠性数据分析的一般步骤。
- 1.4 简述“单元”和“系统”的联系与区别。

第2章 常见的可靠性指标及其概率解释

在工程中,为定量描述产品的可靠性,通常采用一些数量指标。这些数量指标一方面能够从某一角度表示产品的可靠性或寿命的状态,具有明确的工程意义;另一方面,它们具有概率统计上的特征,可以用概率统计的方法进行统计推断。本章介绍在可靠性数据分析中常用的一些可靠性数量指标以及它们的工程意义和统计特征。

2.1 可靠度和可靠寿命

产品可靠度的定义为产品在规定的时间内和规定的条件下,完成规定功能的概率,通常记为 $R(t)$ 。把产品从处于完好状态开始直到进入失效状态所经历的时间记为 ξ ,称它为产品的寿命。它是一非负随机变量,则 $R(t)$ 的概率可表示为

$$R(t) = P(\xi > t) \quad (2.1)$$

产品的可靠度 $R(t)$ 是时间的函数,且满足 $0 \leq R(t) \leq 1$ 。开始使用时,产品的可靠度为 1,即 $R(0) = 1$;随着时间的增加,产品的可靠度越来越低(见图 2.1),且 $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ 。

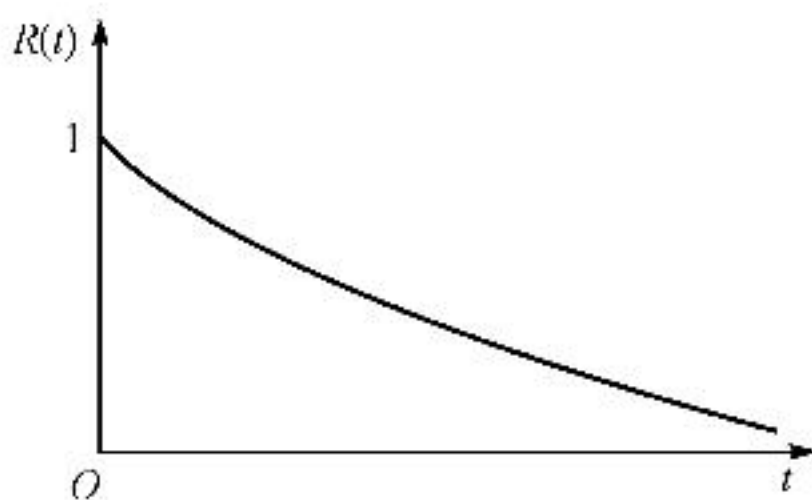


图 2.1 可靠度曲线

在可靠度的定义中,对“规定的条件”应引起特别重视。当产品的工作应力发生变化后,其可靠度函数规律是要发生变化的,这一点在进行产品可靠性数据分析时要特别注意。不同工作条件下的数据,不能简单地放在一起处理。例如,某金属膜电阻在温度为 $45\text{ }^{\circ}\text{C}$ 和电流为 100 mA 的条件下工作 $1\text{ }000\text{ h}$,其阻值变化不超过 $\pm 3\%$ 的概率为 99% 。这就是说,该电阻在温度 $45\text{ }^{\circ}\text{C}$ 、电流为 100 mA 的条件下,工作 $1\text{ }000\text{ h}$ 的可靠度为 0.99 。而当温度和电流发生变化后,其工作 $1\text{ }000\text{ h}$ 的可靠度就不再是 0.99 了。

$R(t)$ 可用频率的观点来解释。如 $R(500)=0.95$, 意味着如果有 1 000 件这样的产品工作 500 h, 则大约有 950 件能完成规定的功能, 而大约有 50 件产品发生故障。同样, 也可以用频率去估计 $R(t)$ 。假如在 $t=0$ 时, 有 N 件产品开始工作, 到 t 时刻有 $n(t)$ 件产品失效, 仍有 $N-n(t)$ 件产品在继续工作, 则

$$\hat{R}(t) = \frac{N-n(t)}{N} = 1 - \frac{n(t)}{N}$$

产品的可靠度 $R(t)$ 表示了产品在 t 时刻, 能正常工作的概率是多少。在工程中, 有时要知道为保证产品正常工作的概率在某一水平 R 以上, 产品可以工作多长时间, 即根据

$$P(\xi > t) = R(t) = R$$

求相应的时间 t , 该时间称为可靠寿命 t_R 。可靠度 $R=0.5$ 时的可靠寿命 $t_{0.5}$ 称为中位寿命, 中位寿命反映了产品好坏各占一半可能性的工作时间。

2.2 失效分布函数和平均寿命

2.2.1 失效分布函数

对于不同的产品, 不同的工作条件, 寿命 ξ 的统计规律不同。它往往可以用一个分布函数 $F(t)$ 来描述, 即

$$F(t) = P(\xi \leq t), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

它表示在规定的条件下, 产品的寿命不超过 t 的概率, 或者说产品在 t 时刻前发生失效的概率。在可靠性中, 寿命 ξ 的分布函数 $F(t)$ 称为失效分布函数或寿命分布函数。知道了 $F(t)$, 则产品寿命(或可靠性)的统计分布规律就清楚了, 因此, 确定产品的失效分布函数 $F(t)$ 是可靠性数据分析的中心问题。

由式(2.1)和式(2.2), 容易看出 $F(t)$ 与 $R(t)$ 之间的关系:

$$F(t) = 1 - R(t), \quad t > 0$$

因此, $F(t)$ 也称做产品在 t 时刻的不可靠度。当产品开始使用时, 其不可靠度为 0, 即 $F(0)=0$; 随着时间的增加, 产品的不可靠度越来越高(见图 2.2), 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)=1$ 。

如果寿命 ξ 是连续型随机变量, 则必存在函数 $f(t)$, 使得

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx \quad \text{或} \quad R(t) = \int_t^\infty f(x) dx \quad (2.3)$$

$f(t)$ 称为产品的失效密度函数。显然, $f(t)$ 有下述性质:

① $f(t)$ 与 $R(t)$ 及 $F(t)$ 有以下关系(见图 2.3):

$$f(t) = F'(t) = -R'(t)$$

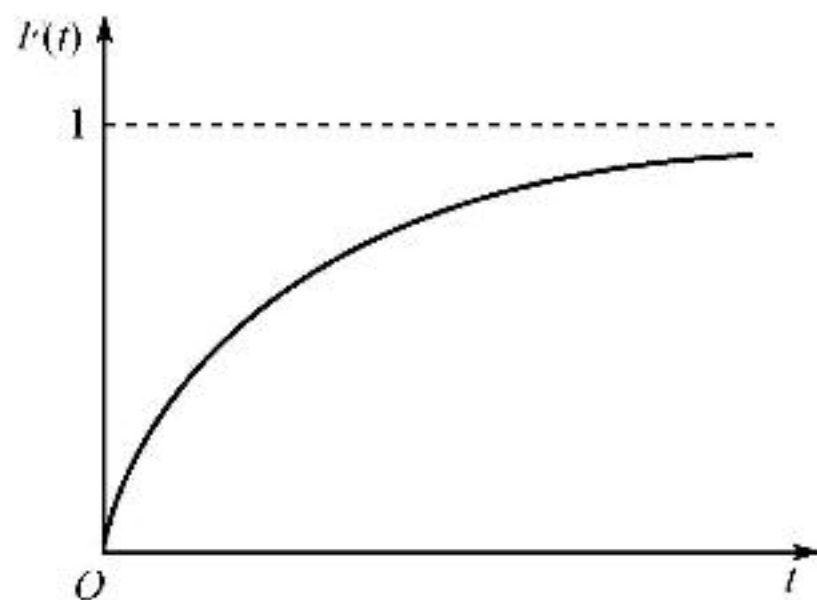


图 2.2 分布函数曲线

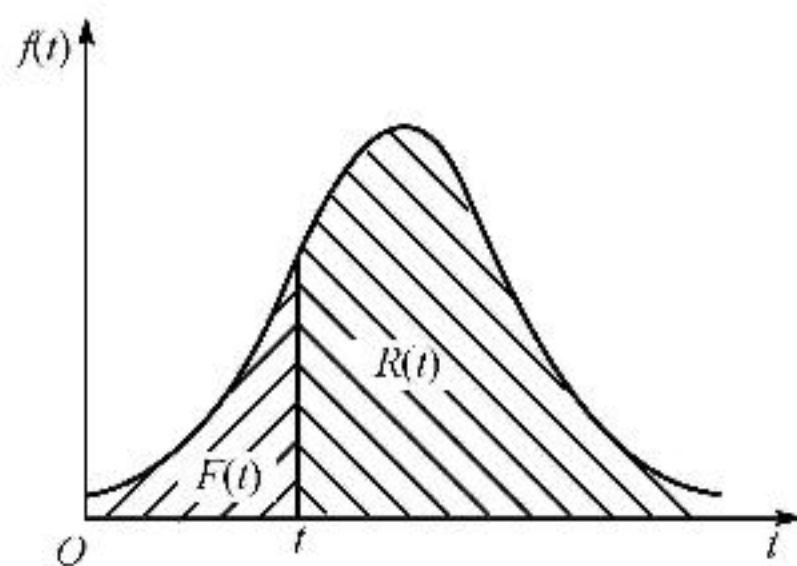


图 2.3 概率密度曲线

② 产品在 $t_1 \sim t_2$ 之间的失效概率为

$$P(t_1 < \xi \leq t_2) = F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

特别,产品在 $t \sim t + \Delta t$ 之间的失效概率为

$$P(t < \xi \leq t + \Delta t) = F(t + \Delta t) - F(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx \approx f(t) \Delta t \quad (2.4)$$

③ 产品用到时刻 t 仍然完好,这个 t 也称为产品的年龄。具有年龄 t 的产品从 t 时刻开始继续使用下去直到失效为止所经历的时间,称为具有年龄 t 的产品的剩余寿命,记为 ξ_t 。 ξ_t 也是随机变量,其分布记为 $F_t(x)$,则有

$$F_t(x) = P(\xi_t \leq x) = P(\xi \leq t + x | \xi > t) = \frac{F(t + x) - F(t)}{1 - F(t)} \quad (2.5)$$

2.2.2 平均寿命

设产品寿命 ξ 的失效密度函数为 $f(t)$,则它的数学期望

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

称为产品的平均寿命。平均寿命是标志产品平均能工作多长时间的量。许多产品,如电视机、计算机、雷达和电台等,都可以用平均寿命作为其可靠性指标,直观地了解它们的可靠性水平。

对于像灯泡、晶体管这类的不可修复产品,平均寿命就是平均寿终时间,或称平均失效前工作时间,记为 MTTF(Mean Time To Failure)。像雷达、电台这类的可修复产品,平均寿命指的是平均故障间隔时间,记为 MTBF(Mean Time Between Failure)。假如仅考虑首次失效前的一段工作时间,那么两者就没有区别。

对于完全样本,其平均寿命的估计可以用“矩估计法”。对于随机抽取的 n 个样品,经过寿命试验获得各样品发生故障的时刻分别为 t_1, t_2, \dots, t_n ,则这 n 个数的算术平均值

$$\bar{t} = \frac{1}{n} (t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

可用来估计这批产品的平均寿命。

对于不完全样本,其平均寿命的估计需要使用寿命分布的统计推断。

例 2.1 抽取某种发报机 18 台做寿命试验,各台从开始工作到发生初次故障的时间(单位:h)为 160,290,506,680,1 000,1 300,1 408,1 632,1 632,1 957,1 969,2 315,2 400,2 912,4 010,4 315,4 378,4 500。试估计这批发报机的平均寿命,并估计其工作到平均寿命时的可靠度。

解: 这批发报机的平均寿命

$$\bar{t} = \frac{1}{18}(160 + 290 + \cdots + 4\,500) \text{ h} = 2\,075.8 \text{ h}$$

发报机工作到平均寿命时的可靠度

$$\hat{R}(2\,075.8) = \frac{7}{18} \approx 0.389$$

2.3 失效率

无论是在可靠性理论还是在可靠性工程中,失效率都是一个极其重要的概念,它是描述产品可靠性规律的最主要数量指标之一。

2.3.1 失效率的概念

产品失效率的定义:工作到 t 时刻尚未失效的产品,在该时刻后单位时间内产品发生失效的频率,通常记为 $\lambda(t)$ 。由定义可看出

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \xi \leq t + \Delta t \mid \xi > t)}{\Delta t} \quad (2.6)$$

对产品失效率的含义,可以这样理解。设在 $t=0$ 时有 N 个产品开始工作,到时刻 t 有 $n(t)$ 个产品失效,还有 $N-n(t)$ 个产品在继续工作。假如又工作了 Δt 时间,到时刻 $t+\Delta t$ 又有 Δn 个产品失效,那么在时刻 t 尚有 $N-n(t)$ 个产品继续工作的条件下,在时间 $(t, t+\Delta t)$ 内单位产品的失效概率为

$$\frac{\Delta n}{N - n(t)} = \frac{\text{在时间}(t, t + \Delta t)\text{内失效的产品数}}{\text{在时刻 } t \text{ 仍正常工作的产品数}}$$

于是产品工作到时刻 t 之后,单位时间内发生失效的频率为

$$\frac{\Delta n / [N - n(t)]}{\Delta t} = \frac{\Delta n}{\Delta t [N - n(t)]} = \hat{\lambda}(t) \quad (2.7)$$

这就是产品失效率 $\lambda(t)$ 的频率估计。因为频率具有稳定性,所以当 N 越大, Δt 越小时,这个估计就越精确。

根据频率解释,比较失效率 $\lambda(t)$ 与失效密度 $f(t)$ 的区别。由式(2.4)得

$$\hat{f}(t) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{\{[n(t) + \Delta n] / N\} - [n(t) / N]}{\Delta t} = \frac{\Delta n}{N \Delta t}$$

与式(2.7)比较,可以看出, $N-n(t)$ 反映了失效率 $\lambda(t)$ 的“产品工作到时刻 t 后”这个条件,虽然 $f(t)$ 也能反映产品失效的变化速度,但显然不如失效率 $\lambda(t)$ 灵敏,因此,失效率有时候也被称为失效强度,尤其对可修产品的可靠性数据分析,产品的失效时间用随机过程处理,过程的失效强度即失效率 $\lambda(t)$,其定义为 $\lambda(t)=dn(t)/dt$ 。

2.3.2 失效率的性质

因为 $\lambda(t)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < \xi \leq t + \Delta t | \xi > t)}{\Delta t}$,而

$$P(t < \xi \leq t + \Delta t | \xi > t) = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}$$

于是,导出失效率 $\lambda(t)$ 与分布密度 $f(t)$ 、分布函数 $F(t)$ 以及可靠度 $R(t)$ 的关系

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \times \frac{1}{1 - F(t)} = \frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (2.8)$$

由式(2.8),容易得出 $\lambda(t)$ 的其他性质:

$$\textcircled{1} R(t) = \exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right];$$

$$\textcircled{2} f(t) = \lambda(t) \exp \left[- \int_0^t \lambda(x) dx \right]。$$

应注意,产品失效率 $\lambda(t)$ 是有量纲的,其量纲为1/单位时间。

例 2.2 已知产品的失效密度函数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-\gamma)}$, $t \geq \gamma$ 。试推导其失效分布函数、可靠度函数、失效率函数、平均寿命和可靠寿命。

解: 该产品的失效分布函数为

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{\gamma}^t f(x) dx = \int_{\gamma}^t \lambda e^{-\lambda(x-\gamma)} dx = \\ &= -e^{-\lambda(x-\gamma)} \Big|_{\gamma}^t = 1 - e^{-\lambda(t-\gamma)}, \quad t \geq \gamma \end{aligned}$$

可靠度函数为

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda(t-\gamma)}, \quad t \geq \gamma$$

失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda, \quad t \geq \gamma$$

平均寿命为

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{\gamma}^{\infty} t f(t) dt = \int_{\gamma}^{\infty} \lambda t e^{-\lambda(t-\gamma)} dt = -t e^{-\lambda(t-\gamma)} \Big|_{\gamma}^{\infty} + \int_{\gamma}^{\infty} e^{-\lambda(t-\gamma)} dt = \\ &= \gamma + \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-\gamma)} \right) \Big|_{\gamma}^{\infty} = \gamma + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

可靠寿命为

$$t(R) = \gamma - \frac{1}{\lambda} \ln R$$

2.3.3 失效率反映的产品故障规律

一般来说,产品的失效率是随时间变化的函数,人们从工程实践中发现,它大致分为三个阶段。图 2.4 反映了产品在三个阶段的故障规律,形象地称之为浴盆曲线。

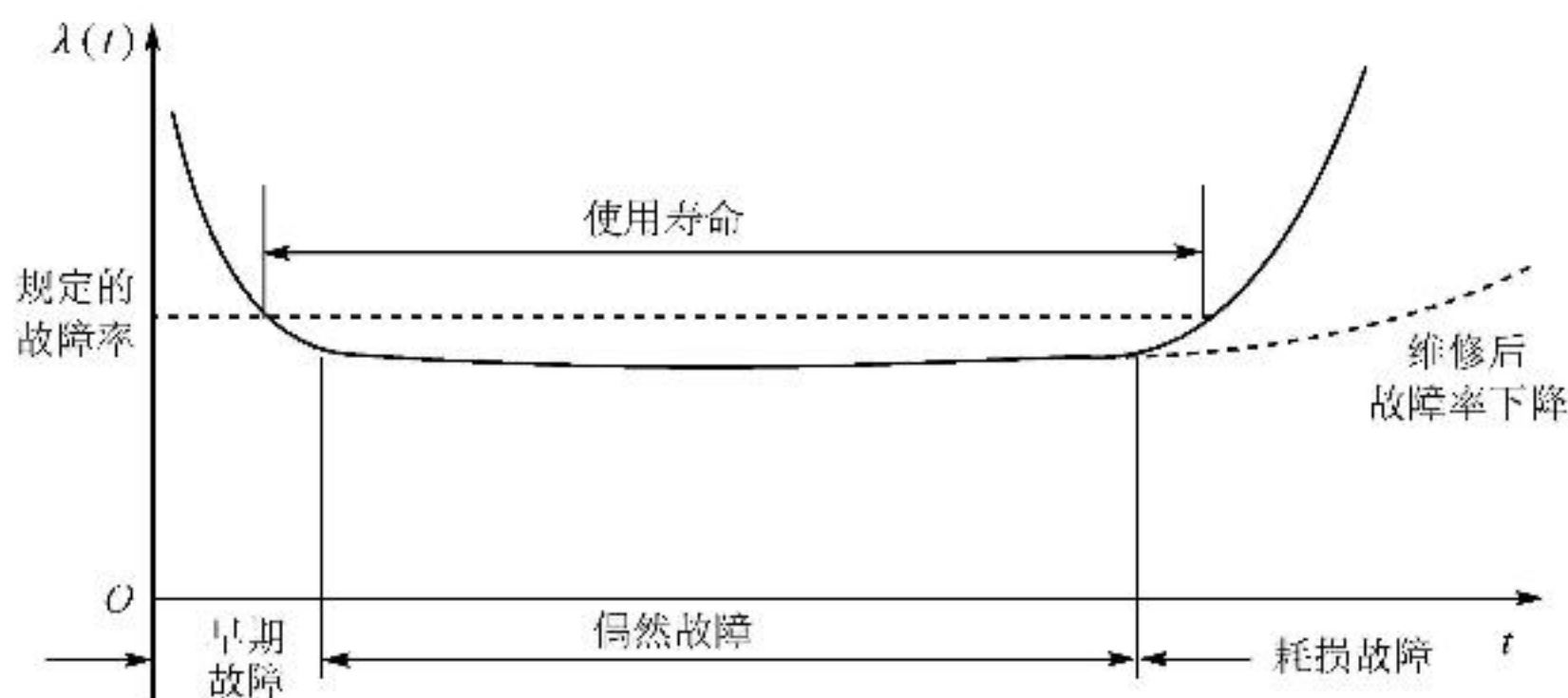


图 2.4 产品典型的故障率曲线

(1) 早期故障阶段

早期故障出现在产品开始工作后的较早时期,其特点是失效率较高,但随着产品工作时间的增加,失效率迅速下降。这一阶段产品故障的原因主要是由于设计和制造工艺上的缺陷所致,如原材料有缺陷、绝缘不良、装配调整不当和点焊不牢等。如果加强对原材料和工艺的检验,对产品进行有效的质量管理,就可以大大减少产品的早期故障。

为使产品的失效率尽量达到较稳定的失效率水平,常常采用可靠性筛选技术,将有缺陷、不可靠的产品尽早暴露出来,使剩余的产品有较低的失效率,接近偶然故障阶段的失效率水平。

(2) 偶然故障阶段

这期间产品失效率较低,而且稳定,近似为常数,故障主要由偶然因素引起。这阶段是产品的主要工作时期。

(3) 耗损故障阶段

这阶段的特点是失效率迅速上升,很快导致产品报废。故障主要是由于产品老化、疲劳和耗损引起。如果事先预计到耗损开始的时间,就可以采取预防维修或更新措施,更换某些元器件,把上升的失效率降下来。

在进行产品的可靠性数据分析时,原则上不同阶段的故障数据不能放在一起按简单

随机样本处理。但在工程实际中,产品的三个故障阶段并不是绝对分开的,往往在通过某一试验得到的一组故障数据中,既有早期因素引起的故障,又有偶然因素和耗损因素引起的故障,这给数据分析带来了困难,因此必须在评估前对故障模式、原因进行认真分析。

2.4 维修性数量指标

和可靠性一样,维修性是指可维修产品在规定的条件下和规定的时间内完成维修任务的能力。产品的维修时间也是随机变量,服从一定的概率分布。

把产品的维修时间所服从的分布称为产品的维修分布,记为 $M(t)$ 。 $M(t)$ 的含义是指产品在规定的条件下进行维修时,在规定的时间内保持或恢复到规定状态的概率。相对于可靠度 $R(t)$ 而言, $M(t)$ 被称做维修度,如果将维修时间记为 η ,则有如下性质:

① $M(t)$ 是取值范围在 $[0,1]$ 之间的非降函数,且 $M(0)=0, \lim_{t \rightarrow \infty} M(t)=1$ 。

② $M(t)=P(\eta \leq t)$,若 η 是连续型随机变量,则存在维修密度函数 $m(t)$,且

$$m(t) = M'(t) \quad \text{或} \quad M(t) = \int_0^t m(x) dx \quad (2.9)$$

③ 工程上,维修度 $M(t)$ 可表示在时间 t 内所有产品故障完成修复的百分比;也可以表示为产品故障发生后,在时间 t 的限度内恢复到工作状态的概率 P 。

对应于产品的平均寿命,维修性中有平均修复时间,记为 MTTR (Mean Time To Repair),其定义为

$$\text{MTTR} = E(\eta) = \int_0^{\infty} t \cdot m(t) dt \quad (2.10)$$

其观测值等于在给定的时间内,所用修复时间的总和与进行修复的次数之比。

对应于产品的失效率 $\lambda(t)$,维修性中有维修率 $\mu(t)$,且

$$\mu(t) = \frac{m(t)}{1 - M(t)} \quad (2.11)$$

类似于可靠度与失效率的关系,有

$$M(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \mu(x) dx\right] \quad (2.12)$$

综上所述,可靠性和维修性有明显的相似之处,也有基本的不同点。可靠度是 $\xi > t$ 的概率,维修度是 $\eta \leq t$ 的概率;要使可靠度大,失效率必须小;但要使维修度大,其修复率必须大。所以对实际的产品,总是希望失效率尽量小,而修复率尽量大。

例 2.3 某修理部一天修理了 25 台收音机,各台修复的时间(单位: min) 如下: 38, 40, 44, 45, 48, 51, 57, 59, 60, 64, 65, 67, 68, 74, 77, 78, 79, 86, 90, 98, 100, 100, 105, 110, 120。试求:

① 100 min 时的维修度;② MTTR;③ 60 min 时的修复率, Δt 取为 5 min。

解：① 维修度 $\hat{M}(t) = \frac{t \text{ 时间内修理台数}}{\text{维修总台数}}$ ，于是

$$\hat{M}(100) = \frac{22}{25} \times 100\% = 88\%$$

② $\text{MTTR} = \frac{\text{各台修理时间的总和}}{\text{总的修理台数}}$ ，于是

$$\text{MTTR} = \frac{38 + 40 + \cdots + 110 + 120}{25} \text{ min} = \frac{1823}{25} \text{ min} = 72.92 \text{ min}$$

③ 修复率 $\hat{\mu}(t) = \frac{t \text{ 到 } t + \Delta t \text{ (包括 } t + \Delta t) \text{ 的修理台数}}{\text{到 } t \text{ 时仍未修好的台数} \times \Delta t}$ ，于是

$$\hat{\mu}(60) = \frac{2}{16 \times 5 \text{ min}} = 2.5 \times 10^{-2} \text{ min}^{-1}$$

习 题

2.1 10 台某种电子产品首次发生故障的时间(单位:h)依次是:22,47,121,134,267,289,306,389,496,567。试估计该产品的平均寿命及其工作到平均寿命时的可靠度。

2.2 某种设备的寿命服从指数分布,假设其平均寿命为 300 h,试求该设备在连续工作300 h,120 h 和 30 h 时的可靠度分别是多少? 可靠度 $R=0.9$ 时的可靠寿命是多少? 其中位寿命又是多少?

2.3 对 1 575 台电视机进行高温老化试验,每隔 4 h 测试一次,直到 36 h 后共失效 85 台,具体数据统计如题表 2.1 所列。试估计 $t=0 \text{ h}, 4 \text{ h}, 8 \text{ h}, 12 \text{ h}, 16 \text{ h}, 20 \text{ h}, 24 \text{ h}, 28 \text{ h}, 32 \text{ h}$ 的失效率各为多少? 并画出失效率曲线。

题表 2.1 数据统计表

测试时间 t_i/h	4	8	12	16	20	24	28	32	36
Δt_i 内故障数/台	39	18	8	9	2	4	2	2	1

2.4 设产品的失效率函数为

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \mu \\ \lambda, & \mu \leq t \end{cases}$$

试求该产品的失效率密度、平均寿命与方差。

2.5 设某产品的寿命 T 的失效率密度函数为

$$f(t) = t e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \geq 0$$

试求该产品的可靠度 $R(t)$ 与失效率 $\lambda(t)$ 。

2.6 设某产品的失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sigma} e^{\frac{t-\mu}{\sigma}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

试求该产品的可靠度 $R(t)$ 与失效分布函数 $F(t)$ 。

2.7 一个系统由 n 个部件串联而成,各个部件工作是独立的,假如每个部件的寿命都服从威布尔分布

$$F(t) = 1 - e^{[-(\frac{t}{\eta})^m]}, \quad t \geq 0, \quad \eta > 0$$

试求该系统的失效分布函数、可靠度函数和失效率函数。

2.8 设产品的失效率函数为

$$\lambda(t) = ct, \quad t \geq 0$$

其中 c 是常数。试求其失效密度 $f(t)$ 与可靠度函数 $R(t)$ 。

2.9 设某产品的寿命服从 $\mu=20\,000\text{ h}$ 与 $\sigma=2\,000\text{ h}$ 的对数正态分布。试求 $t=19\,000\text{ h}$ 的可靠度与失效率。

第3章 可靠性数据的收集

3.1 可靠性数据的来源及特点

3.1.1 收集可靠性数据的目的

广义地说,可靠性数据是指在产品寿命周期各阶段的可靠性工作及活动中所产生的能够反映产品可靠性水平及状况的各种数据,可以是数字、图表、符号、文字和曲线等形式,根据本书内容及可靠性数据分析的目的,这里所指的可靠性数据为系统或产品在工作中的故障或维修信息。收集可靠性数据是为了在产品寿命周期内有效地利用数据,为改进产品的设计、生产提供信息;为管理提供决策依据;为保证产品的可靠性服务。具体说来,其目的如下:

- ① 根据可靠性数据提供的信息,改进产品的设计、制造工艺,提高产品的固有可靠度,并为新技术的研究、新产品的研制提供信息。
- ② 根据现场使用提供的数据,改进产品的维修性,使产品结构合理,维修方便,提高产品的使用可用度。
- ③ 根据可靠性数据预测系统的可靠性与维修性,开展系统的可靠性设计和维修性设计。
- ④ 根据可靠性数据进行产品的可靠性分析及可靠性参数评估。

3.1.2 可靠性数据的来源

广义的可靠性数据可以来源于产品寿命周期各阶段的一切可靠性活动,如研制阶段的可靠性试验、可靠性评审报告;生产阶段的可靠性验收试验、制造、装配、检验记录,元器件、原材料的筛选与验收记录,返修记录;使用中的故障数据,维护、修理记录及退役、报废记录等。GJB 1686—93《武器装备质量与可靠性信息管理要求》中对信息的收集范围有详细说明,可作为数据来源的参考。

本书所指的可靠性数据主要从两方面得到,其一是从实验室进行的可靠性试验中得到;其二是从产品实际使用现场得到。从实验室得到的数据叫试验数据,而从现场得到的数据则叫现场数据。

在产品故障频发(可靠性低)的状态下,通过实验室的试验可以很容易地获得数据。但当产品的可靠性提高之后,故障并不轻易发生,通过实验室试验取得数据就很困难。为了解决这

个问题,可以采用加速试验等方法来缩短试验时间。但又发生了试验数据如何与现实数据相对应等问题。在这种情况下,现场数据得到了重视,应当收集产品在现场使用状态下发生故障与缺陷的有关信息,并对其进行分析。

3.1.3 可靠性数据的特点

(1) 时间性

可靠性数据多以时间来描述,产品的无故障工作时间反映了它的可靠性。这里的时间概念是广义的,包括周期、距离(里程)、次数等,如汽车的行驶里程、发动机循环次数等。

(2) 随机性

产品何时发生故障是随机的,所以描述其故障发生时间的变量是随机变量。

(3) 有价性

从两个方面来看,可靠性数据都是有价的。首先,数据的收集需花费大量的财力和物力,所以它本身的获取就是有价的;其次,经分析和处理后的可靠性数据,对可靠性工作的开展和指导具有很高的价值,其所创造的效益是可观的。

(4) 时效性和可追溯性

可靠性数据的产生和利用与产品寿命周期各阶段有密切的关系,各阶段产生的数据反映了该阶段产品的可靠性水平,所以数据的时效性很强。

随着时间的推移,可靠性数据反映了产品可靠性发展的趋势和过程,如经过改进的产品其可靠性得到了增长,当前的数据与过去的数据有关,所以数据本身还具有可追溯性的特点。

3.2 试验数据和现场数据

试验数据和现场数据通常来自不同的寿命阶段。现场数据只能在产品投入使用后得到,而试验数据主要在产品的研制阶段和生产阶段获取。这两种数据是评估产品寿命各阶段的可靠性水平的重要依据。由于数据产生的条件不同,它们各有优劣且各具特色,因而所用数据收集、处理分析的方法也不同。

充分利用试验数据和现场数据,并将它们有效结合,对分析产品的可靠性水平有重要作用,如在运七飞机及其机载设备的定延寿中,采用现场使用数据与厂内可靠性试验数据相结合的方法,有效地分析了飞机及其机载设备的可靠性,保证了运七飞机的安全飞行。

3.2.1 试验数据

从实验室得到的数据是质量优良的数据。因为数据的收集者往往是分析数据的本人,对试验目的、方法完全了解,他们亲自参与到试验中去观测、记录数据,所获得数据的

不确切性要小得多。如果试验条件的制定和方案的实施能较真实地模拟使用中的条件,那么得到的数据将是可靠的,而且由于人为控制其试验条件,对试验中发生的故障现象的研究将会更深入。

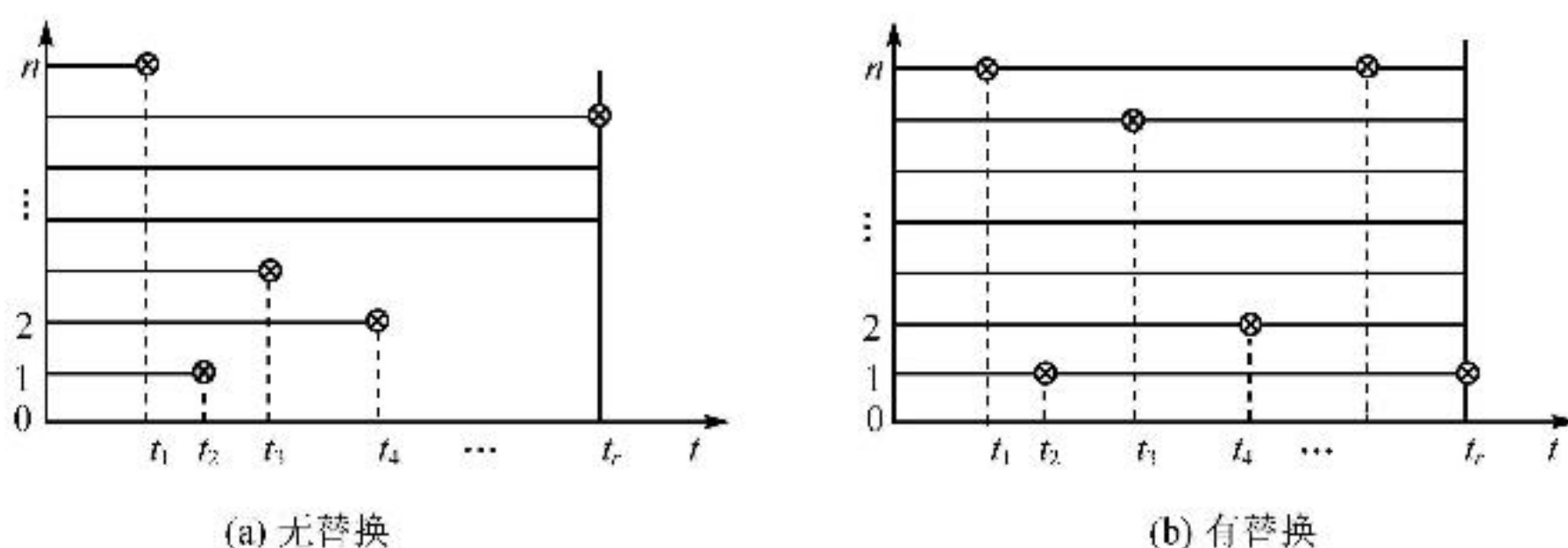
试验数据可以来自可靠性试验、寿命试验或加速寿命试验,也可以来自功能试验、环境试验、定期试验或综合试验等。

可靠性试验主要以截尾试验为主,它们分为定数截尾试验、定时截尾试验和随机截尾试验。在可靠性试验中,参加试验的产品通常只有部分发生故障,如果在试验中全部产品都发生故障,则可称其为完全寿命试验。

定数截尾和定时截尾试验中,根据样品有无替换又分为有替换定数和定时截尾试验及无替换定数和定时截尾试验四种。

(1) 定数截尾试验

试验前规定产品的故障数 r , 试验进行到故障数达到规定故障数 r 就终止试验。若试验进行中,一个产品出现故障就用一个好的样品替换上去继续试验,直至到达规定故障数终止,这就是有替换定数截尾试验,记为 (n, R, r) , 试验自始至终保持样品数不变。若试验中将故障的样品撤下不再补充,而将残存的样品继续试验到规定的故障数 r 才停止,这就是无替换定数截尾试验,记为 (n, U, r) , 如图 3.1 所示。



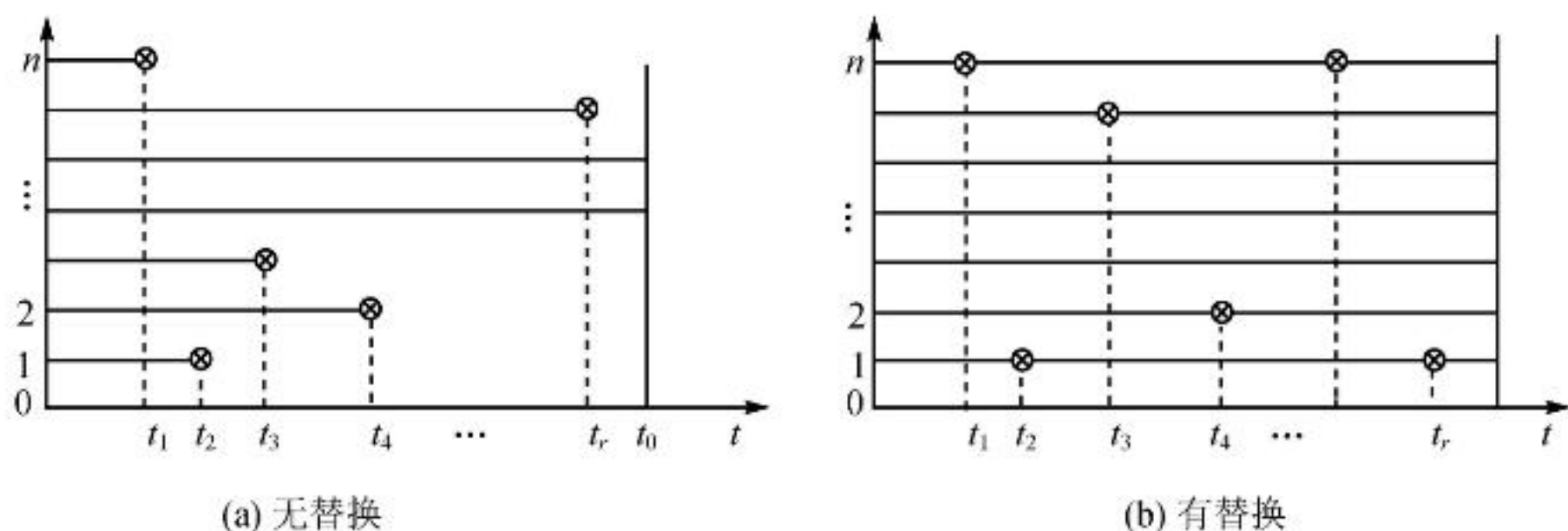
n —参加试验的样品数; r —规定的故障数;
 t_i —故障样品的故障时间

图 3.1 定数截尾试验

(2) 定时截尾试验

试验前规定产品的试验时间 t_0 , 试验进行到规定的试验时间,就终止试验,试验也分有替换定时截尾试验和无替换定时截尾试验,分别记为 (n, R, t_0) 和 (n, U, t_0) , 如图 3.2 所示。

通过可靠性试验获得产品的故障数据,即可分析、评估产品的可靠性参数。为使评估结果尽量准确,最好在整个试验中采用自动监测,进行连续测试,以得到确切的故障时间,而不致在最后的分析中引进较大误差。但是,连续测试不仅在技术上要求高,而且费用也贵,甚至做不



n —参加试验的样品数; t_0 —规定的试验时间;
 t_i —故障样品的故障时间; r —故障的样品数

图 3.2 定时截尾试验

到,因此不得不采取间隔测试的办法。测试的间隔时间可以相等,也可以不等,其长短与产品的寿命分布形式有关:如果是指数分布,则开始测试时间短,然后加长;如为正态分布,则开始可长,以后缩短,主要目的是不要将故障过于集中在少数几个测试间隔内。如果一个测试间隔中有一个以上的故障,则每个故障时间按下面的方法进行计算:设某测试间隔 (t_{k-1}, t_k) 中测得故障数为 r_k ,则在此间隔内的第 j 个故障时间 t_{kj} 为

$$t_{kj} = t_{k-1} + j \times \frac{t_k - t_{k-1}}{r_k + 1}, \quad j = 1, 2, \dots, r_k \quad (3.1)$$

将试验中样品的故障时间 t_i 按其大小顺序进行排列,得一顺序统计量。对完全寿命试验为

$$0 \leq t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(n)}$$

对定数截尾试验,其顺序统计量为

$$0 \leq t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$$

对定时截尾试验,其顺序统计量为

$$0 \leq t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)} \leq t_0$$

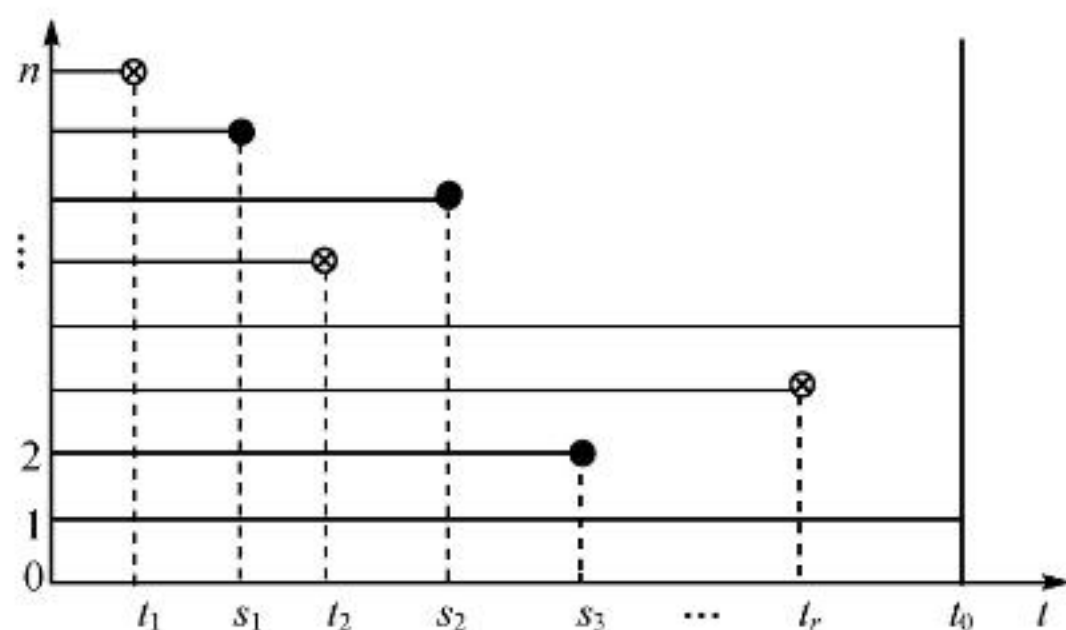
应该注意,在定时截尾数据中所观测到的故障数是在各次试验中有变化的“随机变量”;反之,在定数截尾数据中试验的截尾时间成了“随机变量”。也就是说,在后者的情况下,试验何时结束是事先不知道的。因此,在工程实际中,规定试验截尾时间的定时截尾试验用得更多一些。

3.2.2 现场数据

产品实际使用中得到的数据为现场数据。其中记录产品开始工作至故障的时间(故障时间)及开始工作至统计之时尚未故障的工作时间(无故障工作时间)的数据是用来评估使用可

靠性参数的重要数据,应特别注意收集。现场数据是极其珍贵的,它反映了产品在实际使用环境和维护条件下的情况,比实验室的模拟条件更代表了产品的表现。美国的一些厂家认为:厂内试验需要做,但无论如何也不可能完全复现真实使用条件;同时,对有些可靠性指标来说,如MTBF,靠厂内试验则费用和花费太多。但由于使用地区、环境条件等的差异,相同的产品其可靠性可能不同,所以现场数据波动大,处理时必须按不同情况和处理要求进行分类。以航空产品为例,同样一个机种在空、海军使用情况就不一样,其中腐蚀、盐雾、浸蚀等影响就大不相同。

现场数据中,产品投入使用的时间不同;观测者记录数据时除故障时间外,还有一些产品统计时仍在完好地工作;以及使用中途会因某种原因产品转移他处等,形成了现场数据随机截尾的特性。这是一种随机截尾试验,即产品进行可靠性试验时,由于种种原因一些产品中途撤离了试验,未做到寿终或试验终止,现场得到的这些数据可用图 3.3 表示。其中包括了一些产品的故障时间和另一些产品的无故障工作时间,即删除样品的撤离时间。



⊗—样品故障;●—样品撤离; t_0 —试验截止时间;

t_1, t_2, \dots, t_r —故障样品的故障时间;

s_1, s_2, \dots, s_k —删除样品的撤离时间

图 3.3 现场试验、随机截尾

在现场数据中,对产品实际工作时间的记录是需要注意的,很多产品在使用中无法记录其实际工作时间,只知其工作的日历时间,如测试仪表之类。对于飞机上安装的设备,一般只记录飞机的飞行时间,但有些设备在飞机上并不是一直都在工作,如启动发电机、应急系统等,这就存在一个实际工作时间和记录时间之比的问题,通常称之为运行比。运行比可等于 1,也可小于 1 或大于 1。如发动机在飞行前需进行地面开车,其工作时间将大于飞行时间,运行比将大于 1。然而,对于某些产品,其故障特性与日历时间密切相关,如非金属产品、橡胶件的老化和腐蚀等,实际工作时间并非主要,对这些产品的记录还应以日历时间为主。

3.3 可靠性数据的收集要求和程序

3.3.1 数据的需求

对可靠性数据的需求,是根据产品寿命周期内不同阶段对可靠性分析的需要决定的。这是数据收集前应做的一项重要工作。如在工程研制阶段初期的试验和电子元器件的检测数据等,反映了产品和元器件的缺陷,及时在设计的前期收集这些数据,进行纠正、改进,其效果是明显的。在研制阶段后期,如样机试验中得到的数据,反映了产品的整机在未来使用环境中的表现,其中暴露的薄弱部分正是系统的薄弱环节。这些数据对于研制部门是非常重要的,它们是故障报告、分析与纠正措施系统 FRACAS(Failure Reporting, Analysis and Corrective Action Systems)的重要组成部分。有目的、有针对性地收集这些数据,对产品可靠性增长及达到其设计要求的目标值将起到重要作用。当产品进入使用初期时,对使用中的早期故障应给予重视,根据反馈信息,及时进行改进与纠正,如上海某电视机公司对电视机保修期内发生的早期故障进行了跟踪与纠正,对其电视机质量与可靠性的明显提高起了重要作用。在航空产品制定寿命指标时,应特别注意产品在现场使用中的耗损型故障数据的收集,这对确定产品首翻期是有参考意义的。

对数据的需求,是指对所要获取数据的目的进行分析的过程,以及数据得到后干什么用,如何使用等。有了需求分析才能确定数据的收集点、收集方式和内容。

3.3.2 数据的质和量

数据本身的质和量对数据分析的结果影响很大。从统计观点看,处理的数据量应尽量大一些,因而在费用允许的条件下,获取更多的数据是数据收集的基本要求。

为保证试验数据质的要求,应特别重视试验大纲的制定。大纲中试验的环境条件、使用条件应与实际尽量接近,这样的试验结果才能反映在未来使用和环境下的状态。另外,为了代表产品的可靠性水平,试验中样品的抽取应遵循随机抽取的原则,对于试验周期和试验时间,一般可按标准事先进行计划和安排。只有试验方案考虑周全,才能保证试验结果的质量。

在数据的收集过程中,由于试验数据始终受到密切的监视,因而其数据的质是较高的,使用过程则不然。随着产品投入使用,其信息量越来越大,源源不断的数据反映了产品现场的使用可靠性,然而由于管理等方面的原因,其数据的不确切性很大,因此在对数据满足一定量要求的条件下,对质的要求就应该是至关重要的了。数据收集应满足的基本要求如下。

(1) 真实性

不论是在实验室或使用现场,所记录的数据必须如实代表产品状况,特别是对产品故障的描述,应针对具体产品,切忌张冠李戴。对产品发生故障的时机、原因、故障现象及造成的影响

均应有明确的记录。

数据的真实性是其准确性的前提,只有对产品的状况如实记录与描述,才有助于准确判断问题。即使对某次故障在现场可能误判,但当对故障产品经过分解检查后,就能准确地描述这次故障的真实现象。由于技术水平及其他条件的限制,对故障的真实记录不等于是准确记录,还有待于进一步的分析与判断。

(2) 连续性

可靠性数据有可追溯性的特点,随着时间的推移,它反映了产品可靠性的趋势,因此为了保证数据具有可追溯性,要求数据的记录连续。其中最主要的是产品在工作过程中所有事件发生时的时间记录及对所经历过程的描述,如产品开始工作、发生故障、中止工作的时间及对其中发生故障时的状况、返厂修理、经过纠正或报废等情况的描述。在对产品实行可靠性监控和信息的闭环管理时,连续性是对数据的基本要求。

(3) 完整性

为了充分利用数据对产品可靠性进行评估,要求所记录的数据项尽可能完整,即对每一次故障或维修事件的发生,包括故障产品本身的使用状况及该产品的历史及送修、报废等都应尽可能记录清楚,这样才有利于对产品的可靠性进行全面分析,也有利于更好地制定对其的监控及维护措施。

以上对数据的要求,只有在信息管理体系下对数据进行严格的管理,事先确定好数据收集点,有专人负责数据的记录,有完善的数据收集系统才能做到。因为涉及的数据收集点不止一处,一个产品的经历,只有它所到之处都给予了记录和收集,才有可能保证满足这些要求。另外,要做到这些,对人员素质还有要求,只有那些责任心强,工作认真的人才会去跟踪记录这些数据。

可见对数据的质和量的要求,无疑需要完善的信息管理体系来保证。

3.3.3 可靠性数据的收集程序和方法

可靠性数据的收集应有周密的计划。试验数据的收集一般比较完善,设计人员可根据事先的要求和目的记录所需数据。由于试验中除电子元器件外,投试的产品一般不会很多,逐个记录这些产品在试验中的表现是必要和可行的。现场数据就不可能做到这样完善,产品一投入使用,所到之处都是数据的发生地,在不可能做到面面俱到的情况下,根据需求分析应选择重点产品和地区作为数据收集点。本小节将对数据收集的程序和方法以及应注意的问题进行讨论。

(1) 进行需求分析

在进行数据收集以前必须进行需求分析,明确数据收集的内容及目的,正如 3.3.1 小节中所说,不同的寿命阶段对数据的需求是不同的,因而所收集的对象和内容应随之确定。

(2) 确定数据收集点

在不同的寿命阶段有不同的数据收集点,如内厂试验数据就应选实验室、产品生产检验点、元器件及材料筛选试验点等作为数据收集点;对于现场数据,主要是使用部门的质控室和维修部门等。在选择重点地区或部门时,以有一定的代表性为好,如使用的产品群体较大,管理较好,使用中代表了典型的环境与使用条件等。对于新投入使用的产品,应尽可能从头开始跟踪记录,以反映其使用的全过程。

(3) 制定数据收集表格

这是数据收集系统的重要任务。根据需求制定所需收集内容的统一、规范化的表格,将便于计算机处理,也便于在同行业或同部门内流通;有利于减少重复工作量,提高效率,也有利于明确认识,统一观点。这是一项细致的工作。经过原国防科工委航空装备质量与可靠性信息网多年的实践,充分证明表格的统一、规范化是一项极其重要的工作。

(4) 数据收集的方法

在建立了完善的数据收集系统以后,数据可依其传送的途径,按正常流通渠道进行。当数据收集系统运行尚不完善时,可用以下两种方式进行:一是在使用现场聘请信息员,让其按所要求收集的内容,逐项填表,定期反馈;二是信息系统派专人下到现场收集,按预先制定好的计划进行。两种方式收集的效果是相同的。

(5) 数据收集应注意的问题

虽然现场数据反映了实际使用中产品的可靠性,但相同产品决不是都在相同条件下使用的,因而数据收集时应区分不同条件和地区。如对腐蚀而言,南、北方差异很大,空中和海上差异很大。同一个仪表在同一产品中由于安装部位不同,所处条件差异也很大,如发动机周围的条件就比仪表舱内恶劣得多。在数据收集时应注意区别。

收集现场数据时,一般是从产品投入使用就开始跟踪记录,直至产品退役、报废为止。但由于产品的可靠性问题,可能需要进行改进,尤其在投入使用的初期,因此为了评估产品当前的可靠性,在处理数据时,应注意区分,不能将改进前后的数据混同处理。以某型号飞机为例,在投入使用时,飞机上的六大系统(自动领航仪、航行雷达等),由于故障多,反馈至工厂后,产品进行了改进,之后这些部分的故障明显减少。如果收集数据时,不加说明,分析时不区分这些情况,将其混同处理,那么结果肯定不能代表产品当前的水平。然而,如果为了分析产品的可靠性增长,从其可靠性增长过程来看,又需分析产品改进前后的可靠性水平,以评估其可靠性增长的状况。因此在对待不同的分析目的时,应区分不同的状况来处理。这种情况的考虑可以从产品编号或出厂批次上判别,所以对产品编号和批次的记录是不能忽视的。

现场数据的收集中,由于各种因素的影响,数据丢失现象严重,造成数据不完整和不连续,影响了对数据的分析。在收集数据时,应对这些情况进行了解,以便对分析结果进行修正或作为对评估方法进行研究时的依据。另外,对于数据收集人为差错,只能对收集数据的人员进行培训,加强责任心教育,才能逐步避免。

3.4 故障数据的判定及记录

故障数据是可靠性数据中的重要部分,它是对产品故障时状况的描写,如故障发生时产品的工作时间,发生故障的现象及原因,故障后对产品及其上属系统造成的影响等。

3.4.1 故障及关联故障

为记录产品的故障数据,首先应明确什么是故障,按 GJB 451 的定义,故障即产品或产品的一部分不能或将不能完成预定功能的事件或状态。产品不能完成规定的功能表现在:在规定的条件下工作时,它的一个或几个性能参数不能保持在要求的上、下限之间;其结构部分、组件、元件等,在工作条件下破损、断裂、丧失完成功能的能力。产品所需完成的功能,根据产品应用的场合,规定的工作条件,由技术条件预先规定。同种产品用于不同场合,完成功能的标准可能不同,如军用或民用,军用不合格时,民用可能是合格的。对于非电产品故障判据往往不明确,如过度磨损、轴承运转声音嘈杂等,许多故障不得不由主观判断,确定其故障判据较困难,但有些故障仍可规定一定的界限,如噪声超过多大,渗漏率大于多少等。

故障判据一旦明确,就是判定产品故障的标准;所谓判据即是故障的界限,超过此界限就是故障。预期会在现场使用中出现的产品故障为关联故障。与此相反,非关联故障指已经证实是未按规定的条件使用而引起的故障,或已经证实仅属某项将不采用的设计所引起的故障。

例如某产品使用了新式的挠性加速度表,实验证明它在一定恶劣的环境条件下有较大的参数漂移,会出现超差故障。采用修改支持环境的结构设计会消除这种故障,但本次投入试验的产品还未来得及修改结构,因此,如在本次试验中出现挠性加速度表的误差故障,应列入非关联故障。

在计算机系统的故障中,非关联故障所占比例就很大。这一点从表 3.1 的统计中就可以看出。

表 3.1 计算机系统关联与非关联故障统计表

原因分类	比率/(%)	故障性质
设计	25	关联故障
制造	33	
人为、不正确试验程序	31	非关联故障
二次故障、试验装置故障等	11	

在可靠性分析中,凡被判为非关联故障的故障,应不计为故障。某厂在进行供氧系统的可靠性试验中,取 4 套产品进行 6 782 h 试验,其中共出故障 30 次,经 FRACAS 运行纠正后证明

有效的故障 22 次,共 13 种模式,尚余关联故障 8 次。表 3.2 记录了供氧系统故障与关联故障,则可靠性评估取 8 次关联故障进行。

表 3.2 供氧系统故障与关联故障记录

故障发生 时间/h	故障次数	纠正后尚剩故障次数 (关联故障)	故障发生 时间/h	故障次数	纠正后尚剩故障次数 (关联故障)
23	2	1	1 032	1	0
70	1	0	1 132	3	0
80	1	0	1 266	1	0
350	1	1	1 282	1	0
632	4	1	1 390	1	0
765	3	3	1 482	1	1
782	4	0	1 682	1	0
832	5	1			

在不同的试验中,关联故障的标准和内容可能不同,如航空产品的寿命试验中,主要考核产品的耐久性,确定首翻期,因此应将那些故障后引起产品大修故障作为关联故障;一般偶然性故障经过现场维护,排除即可,只将它们列入非关联故障,在分析数据时不考虑。

在收集故障数据时,首先根据故障判别标准确定产品是否发生故障,进一步再判别其是否为关联故障。从非关联故障的定义还可看出,从属故障、误用及人为因素、非使用条件下使用等引起的故障等都属非关联故障。当然在对数据进行剔除时,应根据产品当时的物理背景进行分析,不能胡乱接受,也不能一律舍弃,尤其是新品,只要它正确地反映事实,那它就可能成为发现早期产品缺陷的重要途径。

3.4.2 故障模式及失效机理

(1) 故障模式

故障模式是故障的表现形式。它是一般能观察到的故障现象,如仪表的某参数漂移、泵漏油和电子元器件短路等。

在可靠性试验或现场使用中,产品的故障模式是最基本的故障数据,由此分析故障产生的原因,寻找薄弱部分,改进产品的可靠性;在研制阶段,故障模式的分析是故障模式、影响及危害度分析 FMECA(Failure Mode Effect and Criticality Analysis)工作的基础,因此,有必要弄清系统或产品在各功能级上的全部故障模式。典型的故障模式有:工作中断、工作时断时续、工作性能下降、提前或滞后接通等。对于具体的产品,其故障模式的记录应更具体一些。

(2) 失效机理

失效机理是引起故障的物理、化学和材料特性等变化的内在原因。它与故障模式的根本

区别是：故障模式是故障的外在表现，即能观察（包括检测）到的不正常现象，而失效机理则是引起这些现象的内在原因。对于作为故障模式的疲劳、磨损、腐蚀和作为失效机理的疲劳、磨损、腐蚀，在说法上相同，但其概念是不同的，如产品材料表面出现黑斑、坑点，就是腐蚀现象，其故障模式应为腐蚀，但腐蚀的机理还有温度等其他原因，所以其失效机理不能简而论之也为腐蚀。

收集试验现场产品故障原因数据，将有助于对失效机理的分析和验证，这也是深入进行故障分析的基础。

3.4.3 故障影响及等级划分

收集产品故障数据的最终目的是要根据所提供的故障信息对产品进行改进，尤其是关键部件或关键部位故障对整个系统的影响将是很大的。因此在故障数据的收集，对产品故障发生所导致的影响及后果不能忽视，应作详细记录和收集。

1. 故障影响

故障影响是故障模式对产品的使用、功能或状态所导致的结果。对产品发生故障后所造成的影响，应考虑以下因素：

- 引起工作能力下降和功能的丧失；
- 引起昂贵的维修费用；
- 与安全有关；
- 某一故障模式高频率地发生。

分析时将故障影响分为局部的、高一层次的和最终影响三级。对飞机上的机载设备来讲，三级指设备级（产品本身）、系统级和飞机。一般来讲，对安全造成影响的是那些没有冗余或替代工作的模式。如有冗余或替代工作模式，则需考虑双重故障造成的影响，如应急装置同时故障造成的严重后果。对每一级的影响根据不同程度分成不同级别，以航空产品为例，具体划分如下。

(1) 自身影响（产品本身）

- I 级——产品功能完全丧失；
- II 级——产品功能下降；
- III 级——产品有故障征候。

(2) 对上一级影响（系统）

- I 级——系统完全丧失功能；
- II 级——系统功能下降；
- III 级——有故障征候；
- IV 级——无影响。

(3) 最终影响（飞机）

- 严重等级事故；

- 等级事故；
- 影响任务完成；
- 停飞；
- 计划外维修；
- 无影响。

2. 故障等级

故障等级是根据故障最终影响的程度来划分的。它们要综合考虑性能、费用、周期、安全和风险等诸方面的因素,即考虑产品发生故障后所带来的对人身安全、任务完成、经济损失等的影响程度。经过对故障影响程度的分析,可用严酷度将故障分为以下 4 类:

- I——灾难性,造成人员伤亡以及飞行器、船舶、车辆毁坏;
- II——严重,造成人员重伤、系统损坏,经济损失大;
- III——一般性,造成人员轻伤、系统功能下降;
- IV——轻度,导致计划外维修。

3. 产品重要度

以航空产品为例,当其发生故障后,往往会导致局部性或全机性的影响后果。不同产品由于功能不同、结构复杂性不同和技术上的难易程度不同,故障将对飞机的飞行安全、任务完成、使用维修和后勤保障等产生不同严酷度等级的影响。将产品按其影响的严重程度进行分类,以此鉴别出哪些产品的故障会危及飞行安全、影响任务完成,并针对这些关键或重要产品采取有效的补偿措施,进而为制定可靠性、维修性、安全性大纲,实施维修改革,以及降低产品的寿命周期费用提供决策支持。

按“航空技术装备寿命和可靠性工作暂行规定”中的要求,将产品分成以下 3 种类别:

- ① 关键产品——A 类,产品故障直接影响飞行安全。
- ② 重要产品——B 类,产品故障不直接影响飞行安全,却直接影响任务完成。
- ③ 一般产品——C 类,产品故障不直接影响飞行安全和任务完成。

上述产品重要度的分类是根据飞机研制初期采用故障模式影响分析 FMEA (Failure Mode and Effect Analysis)、FMECA 工作及逻辑决断分析后得到的。在产品寿命周期中,不同重要度的产品将对信息需求及闭环监控有不同的要求,它是开展可靠性分析中不可缺少的一部分。

3.5 可靠性数据的利用及效果

建立各级可靠性信息管理系统是有效管理和利用数据的根本办法。从 20 世纪 50 年代起,世界上以美国为首的技术先进国家就已充分认识到这一点,特别是对与军方有关的武器装备的数据管理,由国防部归口,已有一套完善的组织系统。如有全国范围的政府与工业部门数

据交换网 GIDEP(Government Industry Data Exchange Program)和直属国防部的空军罗姆航空发展中心的可靠性分析中心 RAC(Reliability Analysis Center);有各航空、航天制造公司建立的生产部门的可靠性数据系统,如 FRACAS;有使用单位建立的军种级和基地级的各种可靠性、维修性及后勤保障数据系统。这些组织与国防部的各种数据管理机构,保证了数据的来源、需求,数据的收集和分析、处理以及数据的有效利用。我国从 80 年代开始,也在武器装备各部门逐步建立起各部门和行业的数据管理系统,虽然尚不健全,但也在某些方面起到了有利的作用,尤其是最早建立的全国电子元器件数据交换网以及 1985 年后建立的航空部和原国防科工委航空装备质量与可靠性信息网。有关信息管理的 GJB 1686—93《武器装备质量与可靠性信息管理要求》也已颁布。

在产品寿命周期中,数据的利用体现在通过各级数据管理系统实现对数据的闭环监控上。闭环监控是利用对数据的闭环控制来实现对产品的可靠性监控的,流程如下:

数据源→数据收集→数据的分析和处理→反馈至有关部门制定纠正措施→纠正措施的实施,形成新的数据源。

在研制、生产制造阶段,是研制、试验、生产部门之间的数据流通及控制,在投入使用后,数据则应在承制方与使用方之间实现闭环监控。实施对数据的闭环监控,在促进在研武器装备的可靠性设计、提高部队综合作战能力和维修及后勤保障水平、降低费用方面均会发挥重大的作用。如新产品的可靠性设计、运七飞机双 35 万的实现等都是利用可靠性数据的成果。以 X—8 飞机为例,其可靠性设计充分利用了类似型号的现场数据 1 万余条,成功地运用于新机的可靠性预计和分配中,并将其作为开展 FMEA 工作的依据,节约了大量的人力和物力,取得了显著的经济效益。国外在利用可靠性数据取得的效益方面更为可观,美国政府和工业部门数据交换网(GIDEP)曾作过统计,1974 年该网成员利用它提供的数据节省费用 1 200 万美元,1980 年节省 2 900 万美元,1983 年节省 5 300 万美元,可见利用这些数据产生的巨大价值。因此,随着可靠性研究的发展,可靠性数据在有效的管理和应用中,将会显示出更坚实的基础力量。

习 题

- 3.1 简述可靠性数据收集的目的、来源及特点。
- 3.2 可靠性试验数据通常分为几类?试述各类之间的联系与区别。
- 3.3 现场试验数据有什么特点?列举造成这些特点的原因。
- 3.4 简述可靠性数据收集和分析的基本流程及注意事项。
- 3.5 什么是故障与关联故障?
- 3.6 试述故障模式与失效机理的联系与区别。

第4章 可靠性数据的初步整理分析

4.1 直方图

直方图是用来整理数据,找出其规律性的一种常用方法。通过作直方图,可以求出一批数据(一个样本)的样本均值及样本标准差,更重要的是根据直方图的形状可以初步判断该批数据(样本)的总体属于哪种分布。作直方图的具体步骤如下:

① 在收集到的一批数据 x_1, x_2, \dots, x_n 中,找出其最大值 L_a 和最小值 S_m 。

② 将数据分组。一般用经验公式(4.1)确定分组数 k ,即

$$k = 1 + 3.3 \lg n \quad (4.1)$$

③ 计算组距 Δt ,即组与组之间的间隔:

$$\Delta t = (L_a - S_m) / k$$

④ 确定各组分点值,即确定各组上限值和下限值。

为了避免数据落在分点上,一般将分点值取得比该批数据多一位小数;或将分点值取成等于下限值和小于上限值,即按左闭右开区间 $[)$ 分配数据。

⑤ 计算各组的中心值:

$$t_i = \frac{\text{某组下限值} + \text{某组上限值}}{2}$$

⑥ 统计落入各组的频数 Δr_i 和频率 ω_i :

$$\omega_i = \frac{\Delta r_i}{n}$$

⑦ 计算样本均值 \bar{t} :

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \Delta r_i \cdot t_i = \sum_{i=1}^k \omega_i t_i \quad (4.2)$$

⑧ 计算样本标准差 s :

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \Delta r_i (t_i - \bar{t})^2} \quad (4.3)$$

⑨ 作直方图。

● 频数直方图:以失效时间为横坐标、各组的频数为纵坐标,作失效频数直方图,参见图 4.1。

- 失效频率分布图:将各组频率除以组距 Δt ,取 $\omega_i/\Delta t$ 为纵坐标,失效时间为横坐标,作失效频率分布图,参见图 4.2。由图看出,当样本量增大,组距 Δt 缩小时,将各直方的中点连成一条曲线,则它是分布密度曲线的一种近似。

在各组组距相同时(在实际处理数据时,组距也可取得不等),产品的频数直方图的形状和频率分布图的形状是相同的。

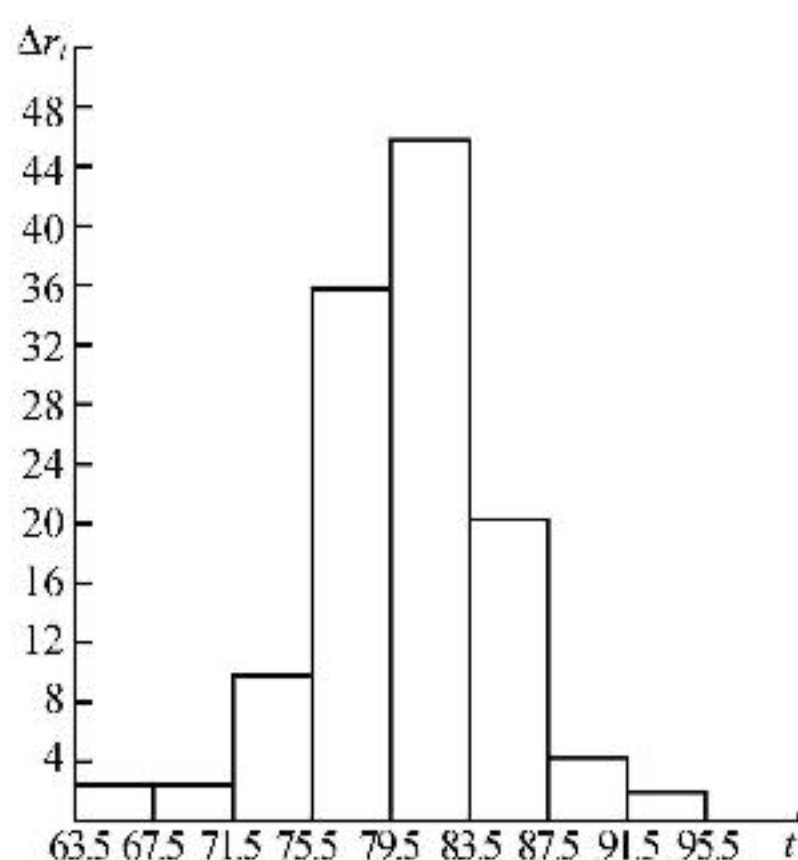


图 4.1 失效频数直方图

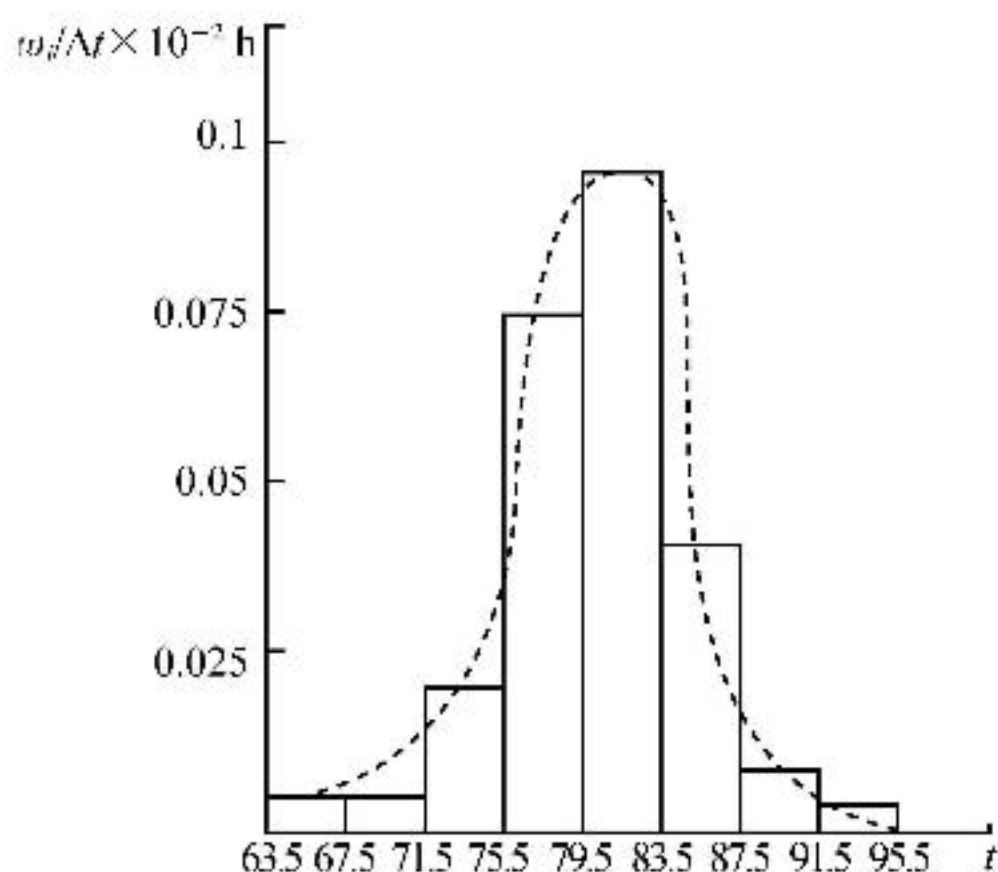


图 4.2 失效频率直方图

- 累积失效频率分布图:第 i 组的累积频率为

$$F_i = \sum_{j=1}^i \omega_j = \sum_{j=1}^i \frac{\Delta r_j}{n} = \frac{r_i}{n} \quad (4.4)$$

其中, r_i 为至第 i 组结束时的累积频数, $r_i = \sum_{j=1}^i \Delta r_j$ 。

以累积频率为纵坐标,失效时间为横坐标,作累积频率分布图,如图 4.3 所示。当样本量 n 逐渐增大到无穷时,组距 $\Delta t \rightarrow 0$,那么各直方中点的连线将趋近于一条光滑曲线,它表示总体的累积失效分布曲线。

由上述所作各直方图的形状可以初步判断所抽取的样本其总体属于何种分布。

⑩ 作产品平均失效率曲线。

为初步判断产品的失效分布,也可作产品的平均失效率随时间变化的曲线。平均失效率 $\bar{\lambda}(\Delta t_i)$ (也表示为 $\bar{\lambda}(t_{i-1}, t_i)$),表示在 Δt_i 时间区间内产品的平均失效率,由下式计算,即

$$\bar{\lambda}(\Delta t_i) = \frac{\Delta r_i}{n_{s,i-1} \Delta t_i} \quad (4.5)$$

其中, Δr_i 指在 Δt_i 时间区间内的失效频数,也可表示为 $\Delta r(t_i)$, $n_{s,i-1}$ 指进入第 i 个时间区间(第 i 组)时的受试样品数,也可表示为 $n_s(t_{i-1})$,即至 t_{i-1} 时刻为止继续受试的样品数,有

$$n_{s,i-1} = n - r_{i-1} \quad (4.6)$$

而 r_{i-1} 指进入第 i 个时间区间时的累积失效数,也可表示为 $r(t_{i-1})$ 。由计算得到的平均失效率曲线如图 4.4 所示。

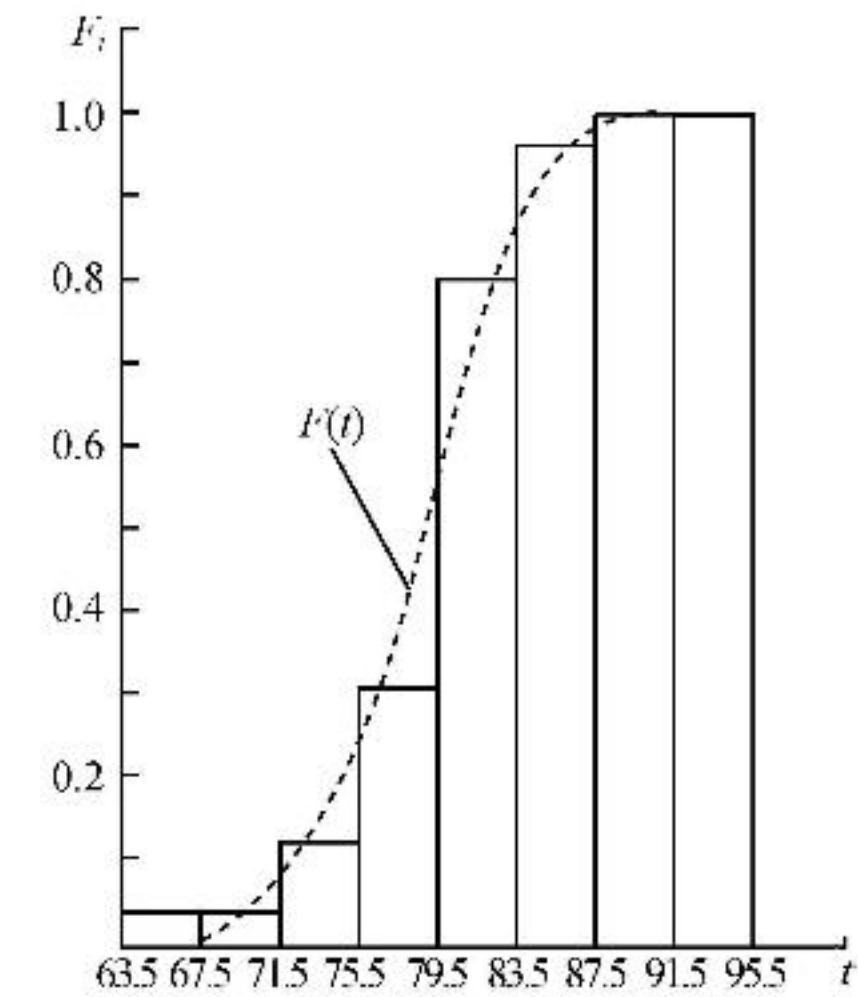


图 4.3 累积失效频率直方图

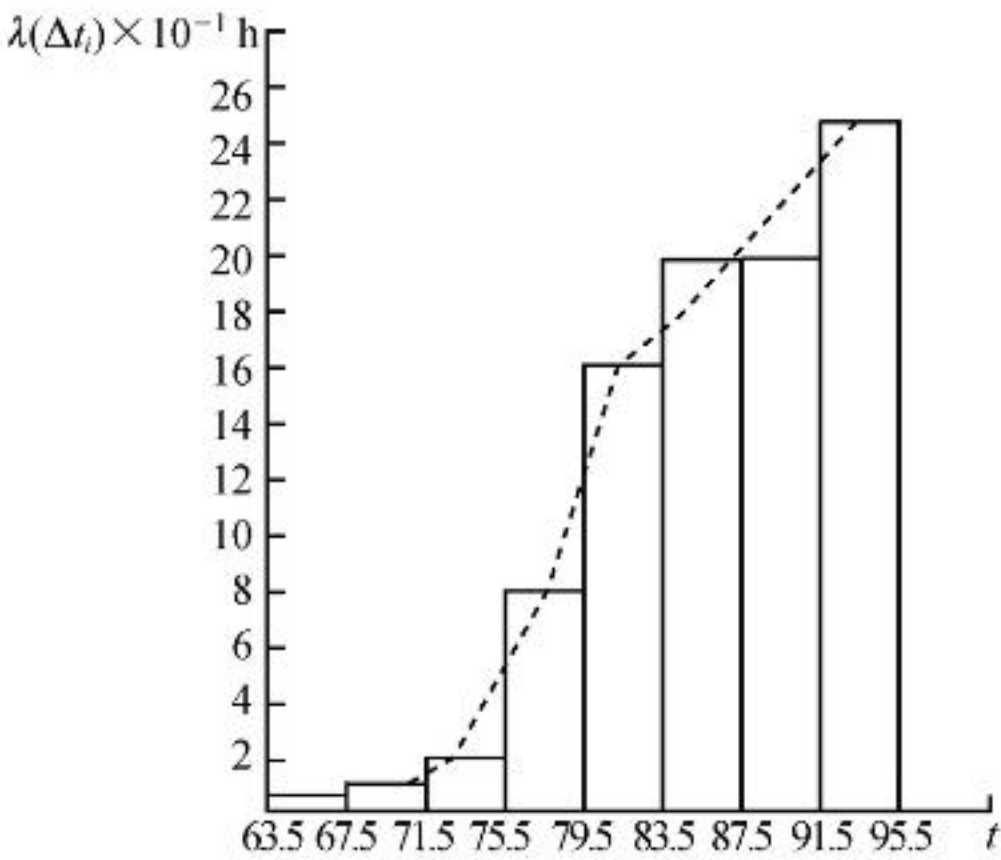


图 4.4 平均失效率直方图

例 4.1 抽查 120 个电子管,其寿命如表 4.1 所列,试求平均寿命及其标准差,并作产品直方图及平均失效率曲线,初步判断其寿命为何种分布。

表 4.1 电子管寿命数据

10 ⁻² · 寿命值/h																			
86	83	77	81	81	80	79	82	82	81	75	79	85	75	74	71	88	82	76	85
82	78	80	81	87	81	77	78	77	78	81	79	77	78	81	87	83	65	64	78
77	71	95	78	81	79	80	77	76	82	80	80	77	81	75	83	90	80	85	81
84	79	90	82	79	82	79	86	76	78	82	84	85	84	82	85	84	82	85	84
82	78	73	83	81	81	83	89	81	86	81	87	77	77	80	82	83	75	82	82
78	84	84	84	81	81	74	78	78	80	74	78	73	78	75	82	77	78	78	78

解：① 最大值为 $L_a = 95 \times 10^2 \text{ h}$
 最小值为 $S_m = 64 \times 10^2 \text{ h}$

② 按式(4.1)计算,分为 8 组,则 $k = 1 + 3.3\lg 120 = 7.86 \approx 8$

③ 组距为 $\Delta t = \frac{95 \times 10^2 - 64 \times 10^2}{8} \text{ h} = 3.875 \times 10^2 \text{ h} \approx 4 \times 10^2 \text{ h}$

④ 列表计算,见表 4.2。

表 4.2 电子管寿命分组数据累积频率计算表

序 号	$10^{-2} \cdot$ 时间区间/h	$10^{-2} \cdot$ 中心值 t_i	频数 Δr_i	频率 ω_i	$10^{-2} \cdot \omega_i \cdot t_i$	$10^{-2} \cdot (t_i - \bar{t})$	$10^{-2} \cdot \Delta r_i (t_i - \bar{t})^2$	累积频率 F_i
1	63.5~67.5	65.5	2	0.016 67	1.091 9	-14.702 6	432.332 9	0.016 67
2	67.5~71.5	69.5	2	0.016 67	1.158 6	-10.702 6	229.091 3	0.033 33
3	71.5~75.5	73.5	10	0.083 33	6.124 8	-6.702 6	449.248 5	0.116 67
4	75.5~79.5	77.5	36	0.3	23.25	-2.702 6	262.945 7	0.416 67
5	79.5~83.5	81.5	45	0.375	30.562 5	1.297 4	75.746 1	0.791 67
6	83.5~87.5	85.5	20	0.166 7	14.252 9	5.297 4	561.248 9	0.958 33
7	87.5~91.5	89.5	4	0.033 33	2.983 0	9.297 4	345.766 6	0.991 7
8	91.5~95.5	93.5	1	0.008 33	0.778 9	13.297 4	176.820 8	1.000 0
总 和			120		80.202 6		2 533.200 8	

⑤ 平均寿命为

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \Delta r_i \cdot t_i = 8.025 \times 10^3 \text{ h}$$

⑥ 样本标准差为

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k \Delta r_i (t_i - \bar{t})^2} = 4.498\ 8 \times 10^2 \text{ h}$$

所以该电子管的平均寿命为 $8.025 \times 10^3 \text{ h}$,其寿命的样本标准差为 $4.498\ 8 \times 10^2 \text{ h}$ 。

⑦ 作直方图,见图 4.1、图 4.2 与图 4.3。

⑧ 平均失效率的计算。由式(4.5)计算,结果见表 4.3,根据计算结果作直方图,见图 4.4。

⑨ 电子管失效分布的初步判断。由图 4.4 可知,产品失效率随时间的增长而增加,属于耗损型失效;又由图 4.1 和图 4.2 可知,直方图形状左右对称,具有中间大、两头小的特点。由此可初步判断该批电子管的失效分布为正态分布。

表 4.3 电子管寿命分组数据平均失效率计算表

$10^{-2} \cdot$ 时间区间/h	Δr_i	$n_{s,j-1}$	$\Delta t_i/\text{h}$	$\bar{\lambda}(\Delta t_i) \times 10^{-4}/\text{h}$	$10^{-2} \cdot$ 时间区间/h	Δr_i	$n_{s,j-1}$	$\Delta t_i/\text{h}$	$\bar{\lambda}(\Delta t_i) \times 10^{-4}/\text{h}$
63.5~67.5	2	120	400	0.416 7	79.5~83.5	45	70	400	16.07
67.5~71.5	2	118	400	0.423 7	83.5~87.5	20	25	400	20
71.5~75.5	10	116	400	2.155	87.5~91.5	4	5	400	20
75.5~79.5	36	106	400	8.490	91.5~95.5	1	1	400	25

4.2 样本的经验分布函数

4.2.1 定义

设总体 ξ 的一组样本观测值, 将其按从小到大的顺序排列为

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$$

其中, 下标 i 表示其排列的序号, 定义经验分布函数为

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ i/n, & t_i \leq t < t_{i+1} \\ 1, & t \geq t_n \end{cases} \quad (4.7)$$

当样本观测值固定时, $F_n(t)$ 是一个分布函数, 取值范围介于 $0 \sim 1$ 之间, 且是一个非减函数, 它只在 t_i 处有跳跃, 图形表示为一递增台阶, 如图 4.5 所示。

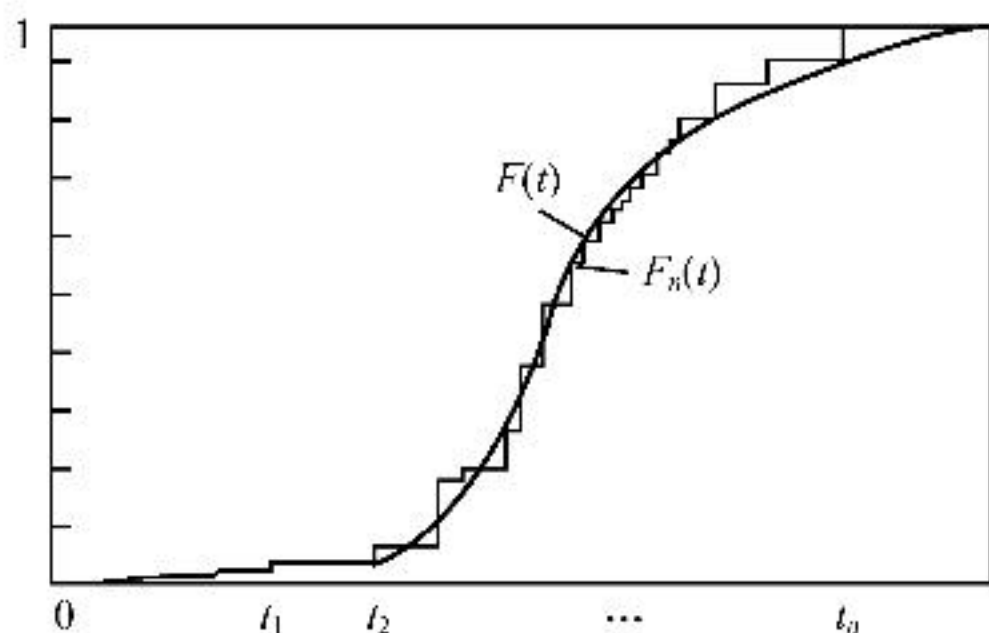


图 4.5 经验分布函数与理论分布函数示意图

对于不同的样本观测值, 得到的经验分布函数也不相同, 不过, 经验分布 $F_n(t)$ 是总体分布 F 的模拟。当样本量 n 足够大时, 经验分布函数 $F_n(t)$ 和总体的分布函数 F 之间只有很小的差别, 在数理统计学中有如下定理。

定理 4.1 (格里文科定理) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体 F 的独立同分布样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $F_n(x)$ 依概率 1 均匀地收敛于 $F(x)$, 即

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right\} = 1$$

4.2.2 经验分布函数的计算

对一批观测数据, 若样本量较大, 一般 $n \geq 20$, 则可直接按式 (4.7) 定义计算, 即

$$F_n(t_i) = i/n$$

其中, 下标 i 表示每个样品的失效序号, 称它为秩。例如 t_5 表示这个时间失效的样品, 其序号

为 5,秩为 5,通俗地讲就是第 5 个失效。

在样本量较大时,也可根据可靠度定义,直接计算其经验分布函数

$$F_n(t) = \frac{r(t)}{n} \tag{4.8}$$

其中, $r(t)$ 为产品到时刻 t 的累积失效数, n 为样本量,即参加试验的产品数。

实践证明,当 n 较少时用上式计算有较大的误差。为了减少误差,在小样本情况($n \leq 20$)下,采用下列公式计算,即

海森(Hansen)公式

$$F_n(t_i) = (i - 0.5)/n \tag{4.9}$$

数学期望公式

$$F_n(t_i) = i/(n + 1) \tag{4.10}$$

近似中位秩公式

$$F_n(t_i) = (i - 0.3)/(n + 0.4) \tag{4.11}$$

也可以直接由中位秩表(见表 4.4)查得。

表 4.4 中位秩表

秩 i	样 本 容 量 n									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.500 0	0.292 9	0.206 3	0.159 1	0.129 4	0.109 1	0.094 3	0.083 0	0.074 1	0.067 0
2		0.707 1	0.500 0	0.386 4	0.314 7	0.265 5	0.229 5	0.202 1	0.180 6	0.163 2
3			0.793 7	0.613 6	0.500 0	0.421 8	0.364 8	0.321 3	0.287 1	0.259 4
4				0.840 9	0.685 3	0.578 2	0.500 0	0.440 4	0.393 5	0.355 7
5					0.870 6	0.734 5	0.635 2	0.559 6	0.500 0	0.451 9
6						0.890 9	0.770 5	0.678 7	0.606 5	0.548 1
7							0.905 7	0.797 9	0.712 9	0.644 3
8								0.917 0	0.819 4	0.740 6
9									0.925 9	0.836 8
10										0.933 0
秩 i	样 本 容 量 n									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.061 1	0.056 1	0.051 9	0.048 3	0.045 2	0.042 4	0.040 0	0.037 8	0.035 8	0.034 1
2	0.148 9	0.136 8	0.126 6	0.117 8	0.110 1	0.103 4	0.097 5	0.092 2	0.087 4	0.083 1
3	0.236 6	0.217 5	0.201 3	0.187 3	0.175 1	0.164 4	0.155 0	0.146 5	0.139 0	0.132 2
4	0.324 4	0.298 2	0.276 0	0.256 8	0.240 1	0.225 4	0.212 5	0.200 9	0.190 5	0.181 2

续表 4.4

秩 i	样 本 容 量 n									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	0.412 2	0.378 9	0.350 6	0.326 3	0.305 1	0.286 5	0.270 0	0.255 3	0.242 1	0.230 2
6	0.500 0	0.459 6	0.425 3	0.395 8	0.370 0	0.347 5	0.327 5	0.309 7	0.293 7	0.279 3
7	0.587 8	0.540 4	0.500 0	0.465 3	0.435 0	0.408 5	0.385 0	0.364 1	0.345 3	0.328 3
8	0.675 6	0.621 1	0.574 7	0.534 7	0.500 0	0.469 5	0.442 5	0.418 4	0.396 3	0.377 4
9	0.763 4	0.701 8	0.649 4	0.604 2	0.565 0	0.530 5	0.500 0	0.472 8	0.448 4	0.426 4
10	0.851 1	0.782 5	0.724 0	0.673 7	0.630 0	0.591 5	0.557 5	0.527 2	0.500 0	0.475 5
11	0.938 9	0.863 2	0.798 7	0.743 2	0.694 9	0.652 5	0.615 0	0.581 6	0.551 6	0.524 5
12		0.943 9	0.873 4	0.812 7	0.759 9	0.713 5	0.672 5	0.635 9	0.603 2	0.573 6
13			0.948 1	0.882 2	0.824 9	0.774 6	0.730 0	0.690 3	0.654 7	0.622 6
14				0.951 7	0.889 9	0.835 6	0.787 5	0.744 7	0.706 3	0.671 7
15					0.954 8	0.896 6	0.845 0	0.799 1	0.757 9	0.720 7
16						0.957 6	0.902 5	0.853 5	0.809 5	0.769 8
17							0.960 0	0.907 8	0.861 0	0.818 8
18								0.962 2	0.912 6	0.867 8
19									0.964 2	0.916 9
20										0.965 9

例 4.2 某钢厂使用 20 支氧枪寿命情况如表 4.5 所列,单位:h。试求其经验分布函数。

表 4.5 氧枪寿命试验数据

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
寿命/h	44.3	41.4	17.7	23.6	25.4	45.1	34.9	38.1	20.9	32.6
序 号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
寿命/h	27.5	19.1	40.8	38.8	31.1	39.0	14.0	27.1	34.6	29.3

解：将 20 个数据由小至大排列,用上述三个公式计算经验分布函数,结果列于表 4.6。

表 4.6 氧枪寿命试验数据累积频率计算表

寿命序号秩(i)	寿命 t_i /h	累积频率 $F_n(t_i)$			
		$(i-0.5)/n$	$i/(n+1)$	$\frac{i-0.3}{n+0.4}$	查中位秩表
1	14	0.025	0.047 6	0.034 3	0.034 1

续表 4.6

寿命序号秩(i)	寿命 t_i/h	累积频率 $F_u(t_i)$			
		$(i-0.5)/n$	$i/(n+1)$	$\frac{i-0.3}{n+0.4}$	查中位秩表
2	17.7	0.075	0.095 2	0.083 3	0.083 1
3	19.1	0.125	0.142 9	0.132 3	0.132 2
4	20.9	0.175	0.190 5	0.181 4	0.181 2
5	23.6	0.225	0.238 1	0.230 4	0.230 2
6	25.4	0.275	0.285 7	0.279 4	0.279 3
7	27.1	0.325	0.333 3	0.328 4	0.328 3
8	27.5	0.375	0.381	0.377 4	0.377 4
9	29.3	0.425	0.428 6	0.426 5	0.426 4
10	31.1	0.475	0.476 2	0.475 5	0.475 5
11	32.6	0.525	0.523 8	0.524 5	0.524 5
12	34.6	0.575	0.571 4	0.573 5	0.573 6
13	34.9	0.625	0.619	0.622 5	0.622 6
14	38.1	0.675	0.666 7	0.671 6	0.671 7
15	38.8	0.725	0.714 3	0.720 6	0.720 7
16	39.0	0.775	0.761 9	0.769 6	0.769 8
17	40.8	0.825	0.809 5	0.818 6	0.818 8
18	41.4	0.875	0.857 1	0.867 6	0.867 8
19	44.3	0.925	0.904 8	0.916 7	0.916 9
20	45.1	0.975	0.952 4	0.965 7	0.965 9

4.3 随机截尾寿命试验的可靠度函数计算

本节介绍计算随机截尾样本数据的可靠度函数或其经验分布函数的两种方法。

4.3.1 用残存比率法计算产品的可靠度

定义产品在时间区间 (t_{i-1}, t_i) 内的残存概率 $S(t_i)$ ，它是一个条件概率，表示在 t_{i-1} 时刻能完好工作的产品继续工作至 t_i 时刻尚能完好工作的概率，有

$$S(t_i) = P\{\xi > t_i \mid \xi > t_{i-1}\} = \frac{P\{\xi > t_i\}}{P\{\xi > t_{i-1}\}} = \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})}$$

因此产品在某时刻 t_i 的可靠度可以表示为

$$R(t_i) = R(t_{i-1}) \cdot S(t_i) \tag{4.12}$$

$S(t_i)$ 可以由样本观测值按下式进行估计,即

$$S(t_i) = \frac{n_s(t_{i-1}) - \Delta r(t_i)}{n_s(t_{i-1})} \tag{4.13}$$

其中, $n_s(t_{i-1})$ 指产品在 t_{i-1} 时刻继续受试的样品数, $\Delta r(t_i)$ 指产品在时间 (t_{i-1}, t_i) 内的失效数。

$$n_s(t_i) = n - \sum_{j=1}^i [\Delta r(t_j) + \Delta k(t_j)] \tag{4.14}$$

其中, n 指试验样本量, $\Delta k(t_j)$ 指在时间 (t_{i-1}, t_i) 内删除的样品数,式(4.12)也可写成

$$R(t_i) = \prod_{j=1}^i S(t_j) \tag{4.15}$$

而

$$F_u(t_i) = 1 - R(t_i) \tag{4.16}$$

式(4.12)是计算可靠度的一个通用公式,在没有删除样品的情况下,它和按可靠度定义 $R(t_i)=n_s(t_i)/n$ 计算的结果相同。

例 4.3 在有监视测试设备的某仪器寿命试验中,测得故障发生时间和删除样品数如表 4.7 所列,试计算其可靠度和失效分布函数。

表 4.7 某仪器寿命试验数据表

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
故障时间/h	1 300	1 692	2 243	2 278	2 832	2 862	2 931	3 212	3 256	3 410	3 651
故障数	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
删除数	4	3	4	3	3	3	4	4	4	4	3

解: 计算结果如表 4.8 所列。

表 4.8 某仪器可靠度与失效分布函数表

项 目 序 号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	t_i/h	$\Delta r(t_i)$	$\Delta k(t_i)$	$n_s(t_{i-1})$	$S(t_i)$	$R(t_i)$	$F_u(t_i)$
	已知	已知	已知	$n - \sum_{j=1}^i (\textcircled{2}_j + \textcircled{3}_j)$	$\frac{\textcircled{4}_{i-1} - \textcircled{2}_i}{\textcircled{4}_{i-1}}$	$\textcircled{5}_i \cdot \textcircled{6}_{i-1}$	$1 - \textcircled{6}_i$
0	0			50		1	0
1	1 300	1	4	45	0.98	0.98	0.02
2	1 692	1	3	41	0.978	0.958 4	0.041 6
3	2 243	1	4	36	0.976	0.935 4	0.064 6

续表 4.8

项 目 序 号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	t_i/h	$\Delta r(t_i)$	$\Delta k(t_i)$	$n_s(t_{i-1})$	$S(t_i)$	$R(t_i)$	$F_u(t_i)$
	已知	已知	已知	$n - \sum_{j=1}^i (\textcircled{2}_j + \textcircled{3}_j)$	$\frac{\textcircled{4}_{i-1} - \textcircled{2}_i}{\textcircled{4}_{i-1}}$	$\textcircled{5}_i \cdot \textcircled{6}_{i-1}$	$1 - \textcircled{6}_i$
4	2 278	1	3	32	0.972 2	0.909 4	0.090 6
5	2 832	1	3	28	0.968 7	0.881	0.119
6	2 862	1	3	24	0.964 3	0.849 5	0.150 5
7	2 931	1	4	19	0.958 3	0.814 1	0.185 9
8	3 212	1	4	14	0.947 4	0.771 3	0.228 7
9	3 256	1	4	9	0.928 6	0.716 2	0.283 8
10	3 410	1	4	4	0.888 9	0.636 7	0.363 3
11	3 651	1	3	0	0.75	0.477 5	0.522 5

例 4.4 对 100 只某种型号的电子管在高应力条件下做寿命试验,并定时地进行测试,同时抽取未失效的电子管作高应力条件下的物理性能分析。其试验情况如下:试验至 90 h 测试没有一只失效。100 h 进行测试有 2 只失效,同时随机地抽取 4 只作性能分析。至 110 h 测试出 10 只失效,并抽出 7 只作性能分析。至 120 h 有 25 只失效,抽 5 只作性能分析。至 130 h 又测出 29 只失效,用 8 只作性能分析。至 140 h 又有 6 只失效,余下 4 只作性能分析,试验停止。求电子管的可靠度函数和失效分布函数。

解: 按式(4.12)~式(4.16),计算结果列于表 4.9。

表 4.9 某电子管可靠度和失效分布函数计算表

项 目 序 号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
	t_i/h	$\Delta r(t_i)$	$\Delta k(t_i)$	$n_s(t_{i-1})$	$S(t_i)$	$R(t_i)$	$F_u(t_i)$
	已知	已知	已知	$n - \sum_{j=1}^i (\textcircled{2}_j + \textcircled{3}_j)$	$\frac{\textcircled{4}_{i-1} - \textcircled{2}_i}{\textcircled{4}_{i-1}}$	$\textcircled{5}_i \cdot \textcircled{6}_{i-1}$	$1 - \textcircled{6}_i$
0	90	0	0	100	1	1	0
1	100	2	4	94	0.98	0.98	0.02
2	110	10	7	77	0.893 6	0.875 7	0.124 3
3	120	25	5	47	0.675 3	0.591 4	0.408 6
4	130	29	8	10	0.383	0.226 5	0.773 5
5	140	6	4	0	0.40	0.090 6	0.909 4

4.3.2 用平均秩次法计算经验分布函数

对于一组完全寿命试验或规则截尾的样本数据,可按其失效时间的大小排列成一组顺序统计量,其中每一个样品的失效时间(或其寿命值)都有一个顺序号,此顺序称为秩次。对于一组不规则截尾的样本数据,由于其中那些尚未失效而中途撤离的样品,什么时间失效无法预计,因此它们的寿命秩次就不好决定,然而却可以估计出它们所有可能的秩次,再求出平均秩次,将平均秩次代入近似中位秩公式(4.11),即可求出其经验分布函数。为便于理解,下面用一个实例来说明。

例如,某车轮轧制厂试制了一批新型产品,取样 6 件在试验室作车轮运行模拟试验。有 3 件试到寿终,有 3 件未试到寿终,把 6 件车轮的“运行里程”按大小排列(见表 4.10)。寿终的以 F 表示,未寿终的以 S 表示,并编下标表示顺序。现用此例说明失效分布函数的计算。

显然, F_1 是它们之中最短寿的一件,在 6 件试样中它的寿命秩次为 1,代入近似中位秩公式得

$$F_n(t_1) = \frac{1 - 0.3}{6 + 0.4} = 0.109$$

表 4.10 车轮运行模拟试验数据表

序 号	运行里程/km	寿终情况	序 号	运行里程/km	寿终情况
1	112 000	F_1	4	484 000	S_2
2	213 000	S_1	5	500 600	S_3
3	250 000	F_2	6	572 000	F_3

F_2 的寿命秩次就不明显了,它的秩次可能为 2(如果 S_1 在 250 000 km 以后寿终),也可能为 3(如果 S_1 在 250 000 km 以前寿终),当然不可能大于 3。如果 F_2 的秩次为 3,前面 3 件的排列为 $F_1 S_1 F_2$;后面 3 个车轮 S_2, S_3, F_3 寿命的情况,将有 $3! = 6$ 种排列。如果 F_2 的秩次为 2,前面两件 的排列为 $F_1 F_2$;后面 4 件的排列将有 $4! = 24$ 种。这样对 F_2 而言,6 个车轮的秩序排列共有 $6 + 24 = 30$ 种; F_2 秩为 3 的有 6 种, F_2 秩为 2 的有 24 种。所以 F_2 的平均秩次为

$$F_2 \text{ 的平均秩次} = \frac{(6 \times 3) + (24 \times 2)}{6 + 24} = 2.2$$

将 F_2 的平均秩次代入中位秩公式得

$$F_n(t_2) = \frac{2.2 - 0.3}{6 + 0.4} = 0.297$$

F_3 的寿命秩次也以此类推,如 F_3 的秩次为 3,则意味着 $S_1 S_2 S_3$ 的寿命均要大于 572 000 km,这时有 6 种排列。如 $S_1 S_2 S_3$ 中有一个的寿命小于 572 000 km,则 F_3 的秩次就

为 4, 这时有 8 种排列。如在 $S_1S_2S_3$ 中有 2 个的寿命小于 572 000 km, 则 F_3 的秩就为 5, 这也有 8 种排列。如 F_3 的 3 个寿命均小于 572 000 km, 则 F_3 的秩次就等于 6, 这时也有 8 种排列。所以 F_3 的平均秩次为

$$F_3 \text{ 的平均秩次} = \frac{(6 \times 3) + (8 \times 4) + (8 \times 5) + (8 \times 6)}{6 + 8 + 8 + 8} = 4.6$$

$$F_n(t_3) = \frac{4.6 - 0.3}{6 + 0.4} = 0.672$$

上述计算十分繁杂, 尤其试件量多时, 排列起来太困难。因此统计学家们给出一个计算平均秩的增量公式

$$\Delta A_k = \frac{n + 1 - A_{k-1}}{n - i + 2} \tag{4.17}$$

$$A_k = A_{k-1} + \Delta A_k = A_{k-1} + \frac{n + 1 - A_{k-1}}{n - i + 2} \tag{4.18}$$

其中, A_k 指失效样品的平均秩次, 下标 k 代表失效样品的顺序号; i 指所有产品的排列顺序号, 按故障时间和删除时间的大小排列。

有了平均秩次, 然后代入近似中位秩公式计算样品的累积失效分布函数, 则

$$F_n(t_k) = \frac{A_k - 0.3}{n + 0.4}$$

下面用递推公式(4.18)计算三件失效样品的平均秩次:

$$A_1 = 0 + \frac{6 + 1 - 0}{6 - 1 + 2} = 1, \quad A_2 = 2.2, \quad A_3 = 4.6$$

残存比率法是由概率乘法公式得来的, 因此它适用于样本量较大的情况, 而平均秩次法可用于样本量较小的情况, 它采用了近似中位秩公式。

例 4.5 根据例 4.3 中表 4.7 的数据, 用平均秩次法计算 $F_n(t)$ 。

解: 50 个样品的失效和删除的顺序及失效时间排列于表 4.11。按式(4.18)与近似中位秩公式计算经验分布的结果列于表 4.11。

表 4.11 样品经验分布函数计算表

i	k	t_k/h	A_k	$F_n(t_k)$
总序号	失效序号	失效时间	按式(4.18)计算	按中位秩公式
1	1	1 300	1	0.013 9
2~5				
6	2	1 692	2.087	0.035 4
7~9				
10	3	2 243	3.252	0.058 6

续表 4.11

i	k	t_k/h	A_k	$F_n(t_k)$
总序号	失效序号	失效时间	按式(4.18)计算	按中位秩公式
11~14				
15	4	2 278	4.542	0.084 2
16~18				
19	5	2 832	5.95	0.112 1
20~22				
23	6	2 862	7.503	0.142 9
24~26				
27	7	2 931	9.243	0.177 4
28~31				
32	8	3 212	11.331	0.218 9
33~36				
37	9	3 256	13.976	0.271 3
38~41				
42	10	3 410	17.678	0.344 8
43~46				
47	11	3 651	24.343	0.477
48~50				

习 题

4.1 从某种绝缘材料中随机抽取 $n=19$ 只样品,在一定条件下进行寿命试验,其失效时间分别为(单位:min):0.19,0.78,0.96,1.31,2.78,3.16,4.15,4.67,4.85,6.5,7.35,8.01,8.27,12.00,13.95,16.00,21.21,27.11,34.95。

① 计算寿命的均值和方差,并画直方图。

② 计算样本的经验分布函数。

4.2 随机抽取某种产品 15 台,从开始使用到发生故障的时间数据(单位:h)如下:16,29,34,46,50,68,69,71,73,74,76,78,78,86,93。试用近似中位秩公式计算产品寿命的经验分布函数。

4.3 在现场统计了 20 台设备的故障数据,记录情况如下。

第 1 台:工作了 110 h 后,由于测试设备失效,观测中断;

第 2 台:工作了 115 h,未失效;
第 3 台:失效时间 200 h;
第 4 台:统计时工作了 230 h;
第 5 台:工作 235 h 失效;
第 6 台:工作 240 h 失效;
第 7 台:工作 275 h 失效;
第 8 台:工作 300 h 因故中断;
第 9 台:305 h 失效;
第 10 台:355 h 失效;
第 11 台:工作了 370 h,尚未失效;
第 12 台:380 h 失效;
第 13 台:工作 395 h 后因操作人员错误,引起失效;
第 14 台:410 h 失效;
第 15 台:工作至 460 h 停止试验;
第 16 台:505 h 失效;
第 17 台:520 h 失效;
第 18 台:680 h 失效;
第 19 台:770 h 失效;
第 20 台:工作了 1 000 h,未失效。

试用平均秩次法计算产品的累积失效分布函数 $F(t)$ 。

4.4 某产品现场统计数据(单位:h)记录如题表 4.1 所列,试用残存比率法计算其可靠度 $R(t)$ 。

题表 4.1 某产品现场统计数据

序 号	1	2	3	4	5	6	7
时间区间/h	0~100	100~200	200~300	300~400	400~500	500~600	600~700
样品删除数	7	20	17	25	21	29	13
样品失效数	3	13	6	6	2	5	1

第 5 章 常用的寿命及故障分布

失效分布函数 $F(t)$ 反映总体的失效规律,对于随机变量取为寿命的总体, $F(t)$ 为连续型分布,它描述了产品的寿命分布;而对随机变量取为失效次数的总体, $F(t)$ 为离散型,描述了产品失效次数分布的规律。

当已知产品的失效分布函数时,则可求出可靠度函数、失效率函数以及表示寿命的许多特征量。即使不知道具体的分布函数,但若已知失效分布的类型,也可通过对分布的参数估计求得某些可靠性特征量的估计值。因此在可靠性问题中,产品的失效分布类型是一个十分重要的问题。

失效分布类型是各种各样的,某一种类型分布可以适用于具有共同失效机理的某些产品。分布类型往往与产品的类型无关,而与施加的应力类型、产品的失效机理和失效形式有关。常用的失效分布有指数分布、正态分布、对数正态分布、威布尔分布、二项分布、泊松分布、极值分布和伽马分布等。

指数分布是一种相当重要的分布,电子产品的寿命试验和复杂系统的失效时间均可用指数分布来叙述。在可靠性工作开展初期用得很多,经过分析研究发现,如果产品的失效分布并非指数分布,那么将指数分布作为普遍的分布是不适宜的,会造成显著的推断误差。近年来,威布尔分布在可靠性工程中得到广泛的应用,自 1939 年瑞典物理学家威布尔提出这种分布并将其应用于疲劳试验以来,1956 年利布林、泽林等人在滚珠轴承的疲劳试验中及高寿命在电子管的寿命试验中也用到了威布尔分布。根据以后科学家的分析和研究认为,威布尔分布是一种很有希望的分布类型,在可靠性研究中具有很强的生命力。

确定产品的失效分布类型有其重要的意义,但要判断其属于哪种分布类型仍是困难的,目前所采用的方法有两个。一种方法是通过失效物理分析,来证实该产品的失效形式或失效机理近似地符合于某种类型的失效分布的物理背景,表 5.1 给出了某些产品在实践经验中得到的对应分布的举例。另一种方法是通过寿命试验,利用数理统计中的判断方法来确定其分布,本书后续章节将叙述检验分布的方法。但是这种方法也不是十分有效的,如有些分布中间部分不易分辨,只有尾端才有不同。而在可靠性试验中,由于截尾子样观测数据的限制,要分辨属于哪种分布是困难的。表 5.1 给出的示例,也仅作参考,只能是近似符合某种分布,而不是绝对理想的分布。

表 5.1 常用产品寿命分布类型对照表

分布类型	适用的产品
指数分布	具有恒定失效率的部件,无余度的复杂系统,经老炼试验并进行定期维修的部件
威布尔分布	某些电容器、滚珠轴承、继电器、开关、断路器、电子管、电位计、陀螺、电动机、航空发电机、电缆、蓄电池、材料疲劳等
对数正态分布	电机绕组绝缘、半导体器件、硅晶体管、锗晶体管、直升机旋翼叶片、飞机结构、金属疲劳等
正态分布	飞机轮胎磨损及某些机械产品

5.1 二项分布及有关分布

5.1.1 二项分布

对于成败型产品,如果一次试验中产品失败的概率为 p ,进行 n 次独立重复的试验,其中失败 r 次($s=n-r$ 是成功次数),用随机变量 X 表示失败次数,其发生概率用参数为 (n, p) 的二项分布表示

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n \tag{5.1}$$

那么失败次数小于或等于某值 r 的累积分布函数为

$$F(r) = P(X \leq r) = \sum_{i=0}^r C_n^i p^i (1 - p)^{n-i} \tag{5.2}$$

由于失败与成功为对立事件,产品一次试验中的成功率 $R=1-p$,同样可用二项分布计算 n 次试验中成功次数小于或等于某值 s 的累积概率,即

$$F(s) = P(X \leq s) = \sum_{i=0}^s C_n^i R^i (1 - R)^{n-i} \tag{5.3}$$

二项分布的均值和方差分别为

$$E(X) = np \quad \text{与} \quad \text{var}(X) = np(1 - p)$$

二项分布广泛应用于可靠性和质量控制领域。比如产品的抽样检验、一次性使用产品(如火工品、火箭、导弹)的可靠性数据分析等。

例 5.1 已知某设备工作成功的概率为 0.98,现将该设备组成的系统设计为 3 中取 2 的冗余系统,试计算系统成功的概率。

解: 设 $R=0.98$ 为单机成功概率, $R(S)$ 为系统成功概率,现要求系统中 3 台设备至少有 2 台完好工作,则

$$R(S) = \sum_{i=2}^3 C_3^i R^i (1-R)^{3-i} = R^3 + 3R^2(1-R) = \\ 0.98^3 + 3 \times 0.98^2 \times (1-0.98) = \\ 0.9988$$

当 n 较大时,二项分布的计算比较困难,可用泊松定理近似计算。

泊松定理 设随机变量 X 服从二项分布 $B(x; n, p)$, 如果 $\lambda = np > 0$ 是常数, 则

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \rightarrow \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad n \rightarrow \infty$$

上述定理表明, 当 n 很大, p 很小, 而 $\lambda = np$ 适中时, 二项分布可由下式计算, 即

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \approx \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda} \quad (5.4)$$

5.1.2 超几何分布

一批产品有 N 件, 含有次品 D 件, 若从这批产品中随机抽取 n 件, 则其中所含的次品数 X 等于 x 的概率为

$$P(X=x) = \frac{C_D^x \cdot C_{N-D}^{n-x}}{C_N^n} \quad (5.5)$$

称 X 服从超几何分布, 其均值和方差分别为

$$E(X) = n \cdot \frac{D}{N} \quad \text{与} \quad \text{var}(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot n \cdot \frac{D}{N} \cdot \frac{N-D}{N}$$

在工程实际中, 如果产品总数 N 很大, 相应的抽样数 n 较小, 则超几何分布就近似于二项分布, 即

$$P(X=x) = \frac{C_D^x \cdot C_{N-D}^{n-x}}{C_N^n} \approx C_n^x \cdot \left(\frac{D}{N}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right)^{n-x}$$

5.1.3 负二项分布

对于批量很大的产品, 预定试验次数 x , 其失败次数 (或成功次数) 是二项分布随机变量。在有些情况下是预定失败次数 f (或成功次数 s), 则它所需的试验次数 X 服从负二项分布。

对预先规定成功次数为 s 的情况, 最后一次试验必定是成功的, 而前 $x-1$ 次试验中恰有 $s-1$ 次成功, 这里每次试验成功的概率为 R 。这两个事件的联合 (乘积) 概率等于事件 $X=x$ 的概率:

$$P(X=x) = C_{x-1}^{s-1} \cdot R^s \cdot (1-R)^{x-s} \quad (5.6)$$

其均值和方差分别为

$$E(X) = \frac{s(1-R)}{R} \quad \text{与} \quad \text{var}(X) = \frac{s(1-R)}{R^2}$$

5.2 指数分布及有关分布

5.2.1 泊松分布

如果随机变量 X 的取值为 $0, 1, 2, \dots$, 其概率分布为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

则称为泊松分布, 记为 $P(\lambda)$ 。泊松分布通常用来描述产品在某个时间区间内受到外界“冲击”的次数。这类随机现象一般具有以下 3 个特点:

① 产品在某段时间内受到 k 次“冲击”的概率与时间起点无关, 仅与该段时间长短有关。

② 在两段相互不重叠的时间内, 产品受到“冲击”的次数 k_1 和 k_2 是相互独立的。

③ 在很短的时间内, 产品受到两次或更多“冲击”的概率很小。

另外, 当外界“冲击”到来时, 产品就发生故障, 则产品的故障前工作时间(寿命)服从指数分布。

泊松分布具有以下性质:

① 泊松分布的均值 $E(X) = \lambda$, 方差 $\text{var}(X) = \lambda$ 。

② 若 X_1, X_2, \dots, X_n 是相互独立的随机变量, X_i 服从泊松分布 $P(\lambda_i)$, 则它们的和 $\sum_{i=1}^n X_i$ 服从泊松分布 $P(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$, 这个性质通常称为可加性。

③ 泊松分布的正态近似。当 k 很大时, 有

$$P\{X \leq k\} = \sum_{x=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \approx \Phi\left(\frac{k + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad (5.8)$$

其中, $\Phi(x)$ 指标准正态分布函数。

5.2.2 指数分布

1. 单参数指数分布

指数分布的密度函数有两种表达形式:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{与} \quad f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$$

$$0 \leq t < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty, \quad 0 < \theta < \infty$$

它们虽然形式不同, 但实质相同, 两个参数 λ 和 θ 存在如下关系:

$$\lambda = 1/\theta$$

其中, λ 为指数分布的失效率, θ 为指数分布的平均寿命。相应的指数分布函数的两种形式为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \text{与} \quad F(t) = 1 - e^{-t/\theta}$$

指数分布的分布密度函数和分布函数如图 5.1 和图 5.2 所示。在图 5.1 中,当 $t=0$ 时, $f(t)=\lambda$,在点 $(0,\lambda)$ 处作切线与 t 轴的交点的横坐标为 θ 。

指数分布的可靠度函数为

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{或} \quad R(t) = e^{-t/\theta}$$

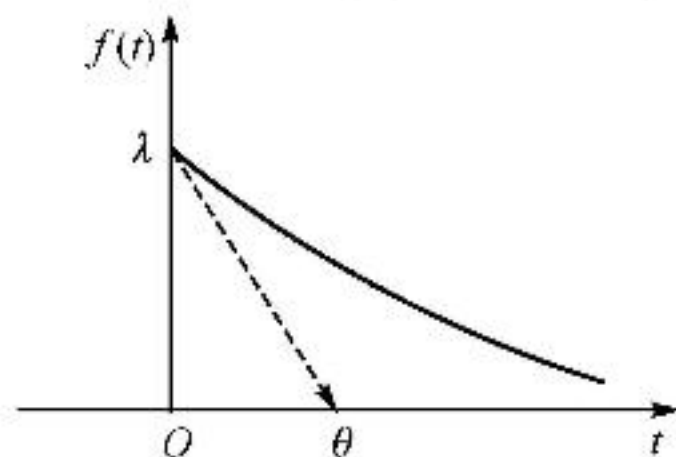


图 5.1 指数分布的概率密度函数

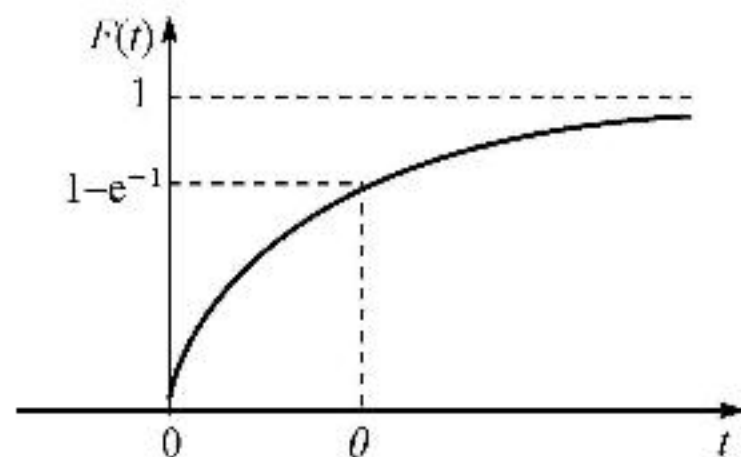


图 5.2 指数分布的分布函数

可靠度函数的图形如图 5.3 所示。

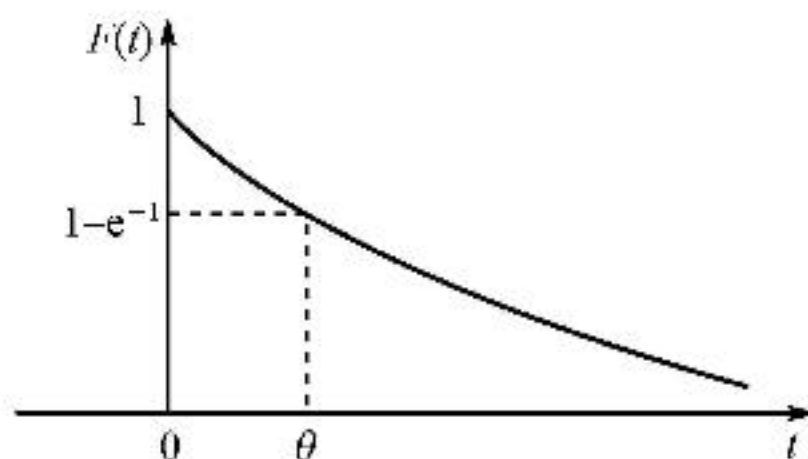


图 5.3 指数分布的可靠度函数

而失效率

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda \quad (5.9)$$

指数分布的均值和方差分别为 $E(T)=1/\lambda=\theta$ 和 $\text{var}(T)=1/\lambda^2=\theta^2$ 。由此可知,指数分布的失效率 $\lambda=1/\theta$ 是一个与时间无关的常数,可以用来描述浴盆曲线的盆底段。

对于任意给定的时间段 $[0,t]$ 内的平均失效率,有

$$\lambda_m(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(x) dx = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda dx = \lambda \quad (5.10)$$

可靠寿命

$$t(R) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R} \quad (5.11)$$

中位寿命

$$t(0.5) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{0.5} = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \theta \ln 2 \quad (5.12)$$

特征寿命

$$t(e^{-1}) = \frac{1}{\lambda} = \theta \quad (5.13)$$

2. 两参数指数分布

两参数指数分布比单参数指数分布多一个位置参数 γ , 其分布密度函数为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad \text{或} \quad f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-(t-\gamma)/\theta}$$

$$0 \leq \gamma \leq t < \infty, \quad 0 < \theta < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty$$

相应的分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad \text{或} \quad F(t) = 1 - e^{-(t-\gamma)/\theta}$$

$$0 \leq \gamma \leq t < \infty, \quad 0 < \theta < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty$$

参数 θ 称为刻度参数, γ 称为位置参数, 其密度函数和分布函数的图形如图 5.4 和图 5.5 所示。从表达式和图形可知, 当位置参数 $\gamma=0$ 时, 双参数指数分布变成单参数指数分布。

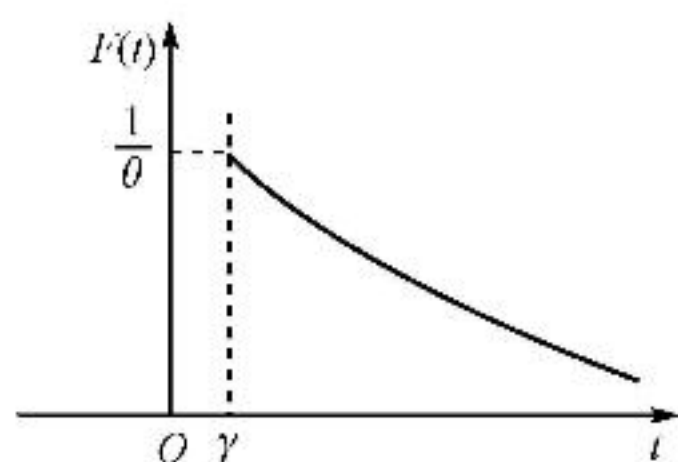


图 5.4 两参数指数分布的概率密度函数图

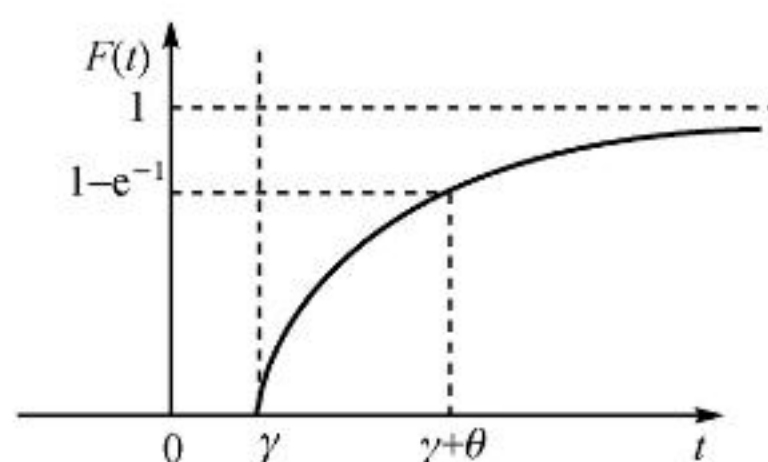


图 5.5 两参数指数分布的分布函数图

两参数指数分布的可靠性特征量与单参数类似, 可表达如下:

可靠度

$$R(t) = e^{-\lambda(t-\gamma)} = e^{-(t-\gamma)/\theta} \quad (5.14)$$

失效率

$$\lambda(t) = \lambda \quad (5.15)$$

平均失效率

$$\lambda_m(t) = \lambda \quad (5.16)$$

可靠寿命

$$t(R) = \gamma + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{R} = \gamma + \theta \ln \frac{1}{R} \quad (5.17)$$

中位寿命

$$t(0.5) = \gamma + \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \gamma + \theta \ln 2 \quad (5.18)$$

特征寿命

$$t(e^{-1}) = \gamma + \frac{1}{\lambda} = \gamma + \theta \quad (5.19)$$

指数分布是可靠性统计中最重要的一种分布,几乎是专门用于描述电子设备可靠性的一种分布。由于其失效率是常数,与时间无关,所以当产品在某种“冲击”(如电应力或温度载荷等)作用下失效,没有这种“冲击”,该产品就不失效时,可用指数分布来说明,认为该产品的失效服从指数分布;当系统是由大量元件组成的复杂系统时,其中任何一个元件失效都会造成系统故障,且元件间失效相互独立,失效后立即进行更换,经过较长时间的使用后,该系统可用指数分布来描述。另外,经过老炼筛选,消除了早期故障,且进行定期更换的产品,其工作基本控制在偶然失效阶段,应为指数分布。

从开始研究可靠性以来,指数分布一直得到广泛的应用,因为它计算简单,参数的估计容易,且失效率具有可加性,所以当系统中各元器件的失效都服从指数分布时,其系统的失效时间也应服从指数分布。指数分布的另一特点是“无记忆性”,即某产品工作一段时间 t_0 后,仍同新品一样,不影响未来工作寿命的长度。用概率论的条件概率可表示为

$$P(T > t_0 + t \mid T > t_0) = P(T > t) \quad (5.20)$$

概率论中已证明指数分布是唯一的具有“无记忆性”的连续分布。

例 5.2 某计算机的错误率是恒定的,即每连续工作 17 天发生一次故障。今有一项任务需要 5 h 的计算才能完成,试问该计算机解决这个问题的可靠度是多少? 求出工作 5 h 后的瞬时错误率。

解: 计算机工作时间服从指数分布,失效率为恒定,即

$$\lambda = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{17 \times 24 \text{ h}} = \frac{1}{408 \text{ h}} = 0.0024 \text{ h}^{-1}$$

工作 5 h 的可靠度为

$$R(5) = e^{-\lambda t} = e^{-0.0024 \times 5} = 0.99$$

由于指数分布的“无记忆性”,5 h 后的瞬时错误率仍为 0.0024 h^{-1} 。

5.2.3 伽马分布

伽马分布主要用来描述产品受到多次“冲击”后才发生故障的产品的寿命分布。伽马分布定义如下:若 $\xi(t)$ 是参数为 λt 的泊松过程,以 τ_α 记它的第 α 个跳跃(泊松冲击)发生的时刻,可以证明 $\{\tau_\alpha < t\} = \{\xi(t) \geq \alpha\}$,记 τ_α 的分布函数为 $F(t)$,则

$$F(t) = P\{\tau_\alpha < t\} = P\{\xi(t) \geq \alpha\} = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (5.21)$$

因此 $f(t) = F'(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}$ 。而对于任意的 $\alpha > 0, \lambda > 0$,有 $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt = 1$,所以称密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

的分布为伽马分布,记为 $\Gamma(\alpha, \lambda)$,其中参数 $\alpha(>0)$ 和 $\lambda(>0)$ 分别称为形状参数和尺度参数。

特别,当 $\alpha = \frac{n}{2}$ (n 为正整数), $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,伽马分布 $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 就是自由度为 n 的 χ^2 分布。

伽马分布的某些性质:

① 伽马分布 $\Gamma(\alpha, \lambda)$ 的均值 $E(X) = \alpha/\lambda$, 方差 $\text{var}(X) = \alpha/\lambda^2$ 。

② 当尺度参数 λ 相同时,伽马分布具有可加性,即若随机变量 X_i 服从伽马分布 $\Gamma(\alpha_i, \lambda)$, 且相互独立,则随机变量和 $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 服从伽马分布 $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \lambda)$ 。

5.3 正态分布及有关分布

5.3.1 正态分布

正态分布的失效密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad 0 < \sigma < \infty$$

它的失效分布函数为

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

经过标准化后为

$$F(t) = \int_0^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right),$$

设 $Z = \frac{t-\mu}{\sigma}$, 则 $F(t) = \Phi(Z)$ 。正态分布的失效密度函数和失效分布函数的图形如图 5.6 和图

5.7 所示。其参数 μ 和 σ 分别称为均值和标准差。

由于产品的寿命取负值是没有意义的,因此在用正态分布描述时,随机变量的取值从 $0 \sim +\infty$, 这样处理在 $\mu \geq 3\sigma$ 时差别是很小的。

正态分布的可靠度函数表示为

$$R(t) = \int_{\frac{t-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right), \quad (5.23)$$

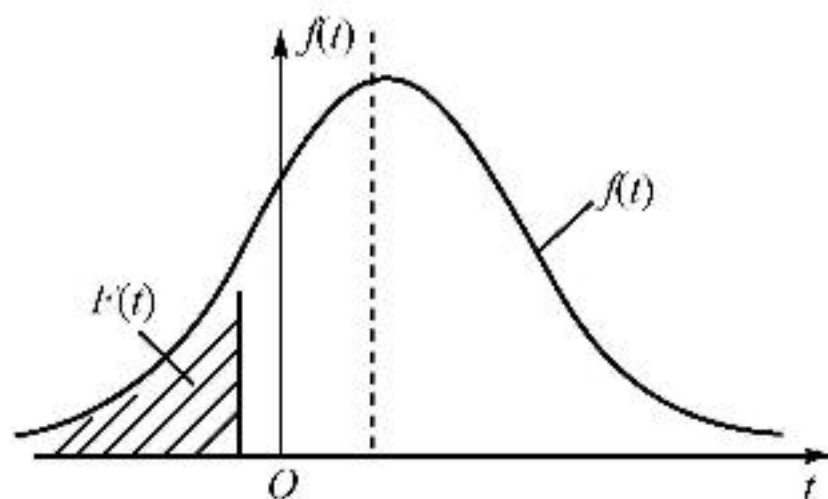


图 5.6 正态分布的失效密度函数图

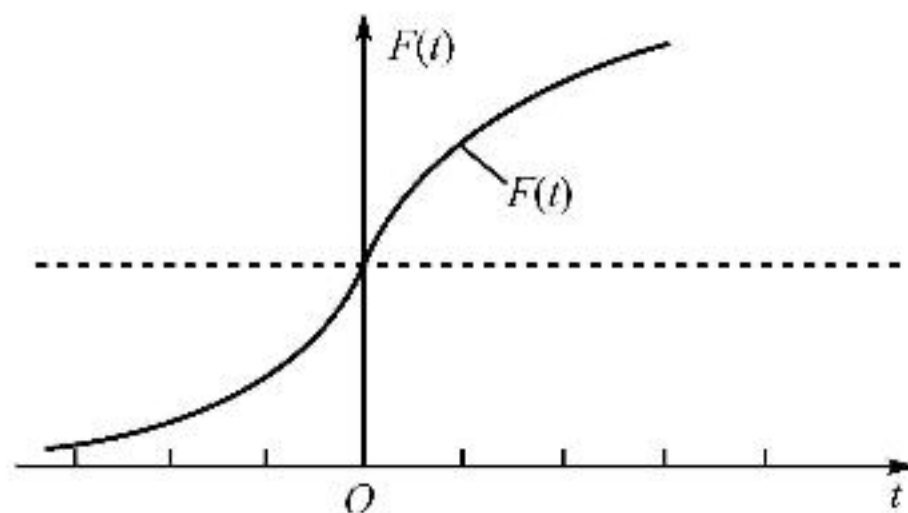


图 5.7 正态分布的分布函数图

失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\int_{\frac{t-\mu}{\sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} = \frac{\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.24)$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 与 $\phi(\cdot)$ 分别指标准正态分布的分布函数和密度函数。

正态分布失效率的图形如图 5.8 所示, 其失效率随时间呈上升趋势, 属于失效递增型 IFR (Increasing Failure Rate)。若产品的工作寿命 ξ 服从正态分布, 则其平均寿命为

$$E(\xi) = \mu \quad (5.25)$$

而寿命的方差 $\text{var}(\xi) = \sigma^2$, 标准差为 σ 。因为 $R = 1 - \Phi\left[\frac{t(R) - \mu}{\sigma}\right] = 1 - \Phi(u_{1-R})$, 其中 u_{1-R} 是

标准正态分布的 $1-R$ 分位点, 所以 $\frac{t(R) - \mu}{\sigma} = u_{1-R}$, 即可靠寿命

$$t(R) = \mu + \sigma \cdot u_R \quad (5.26)$$

而中位寿命

$$t(0.5) = \mu \quad (5.27)$$

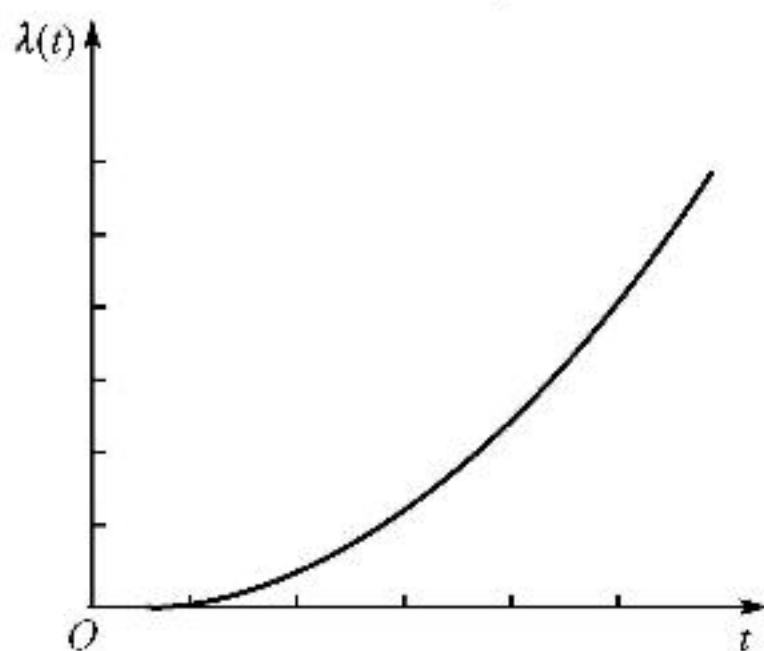


图 5.8 正态分布失效率函数图

例 5.3 微波发射管寿命服从正态分布,其 $\mu=5\,000\text{ h}$, $\sigma=1\,500\text{ h}$ 。试求当任务时间为 $4\,100\text{ h}$ 时,这种管子的可靠度是多少? 使用到 $4\,400\text{ h}$ 时,该管子的瞬时效率又是多少?

解:
$$R(4\,100) = 1 - \Phi\left(\frac{4\,100 - 5\,000}{1\,500}\right) = 1 - \Phi(-0.6) = 0.725\,7$$

$$\lambda(4\,400) = \frac{\phi\left(\frac{4\,400 - 5\,000}{1\,500}\right) / 1\,500}{1 - \Phi\left(\frac{4\,400 - 5\,000}{1\,500}\right)} \text{ h}^{-1} = \frac{\phi(-0.4) / 1\,500}{1 - \Phi(-0.4)} \text{ h}^{-1} = 0.374\,6 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$$

对可靠性来说,正态分布有两种基本用途。一种用于分析由于磨损(如机械装置)、老化、腐蚀而发生故障的产品,另一种用于对制造的产品及其性能进行分析及质量控制。但是由于正态分布是对称的,随机变量取值范围是 $-\infty \sim +\infty$,用它来描述寿命分布时,会带来误差,因此当 $\mu \geq 3\sigma$ 条件不符合时,可用截尾正态分布来处理。

为了满足截尾正态分布的失效密度函数在 $(0, +\infty)$ 上的积分为 1,引入正规化常数 K ,则

$$K = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) \quad (5.28)$$

因此,截尾正态分布的失效密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{K\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{K\sigma} \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad (5.29)$$

它的累积失效分布函数为

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{K\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.30)$$

可靠度函数为

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{K\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.31)$$

失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)} \quad (5.32)$$

其均值和方差分别是

$$E(\xi) = \mu + \frac{\sigma}{K} \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \quad (5.33)$$

$$\text{var}(\xi) = \frac{\sigma^2}{K} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right) \right] - \left[\frac{\sigma}{K} \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \right]^2 \quad (5.34)$$

其中, $\Gamma_x(n) = \int_0^x u^{n-1} e^{-u} du$ 是不完全伽马函数。

5.3.2 对数正态分布

若寿命 ξ 的对数 $\ln \xi$ 服从正态分布, 则称 ξ 服从对数正态分布, 即 $X = \ln t \sim N(\mu, \sigma^2)$, 那么, 对数正态分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (5.35)$$

其失效分布函数为

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx = \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \quad (5.36)$$

对数正态分布的两个参数中, μ 为对数均值, σ^2 为对数方差, 其可靠度函数和失效率依次为

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \quad (5.37)$$

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma} \right)^2}}{\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx} = \frac{\frac{1}{\sigma t} \phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)}, \quad (5.38)$$

当对数正态分布采用以 10 为底的对数 \lg 时, 式(5.35)~式(5.38)中的自然对数 \ln 换作以 10 为底的常用对数 \lg 即可。

对数正态分布的失效密度函数和失效率曲线如图 5.9 和图 5.10 所示。失效率曲线的特点是随时间先增加, 达峰值后又开始减少, 当时间趋于 ∞ 时, 失效率趋于 0。

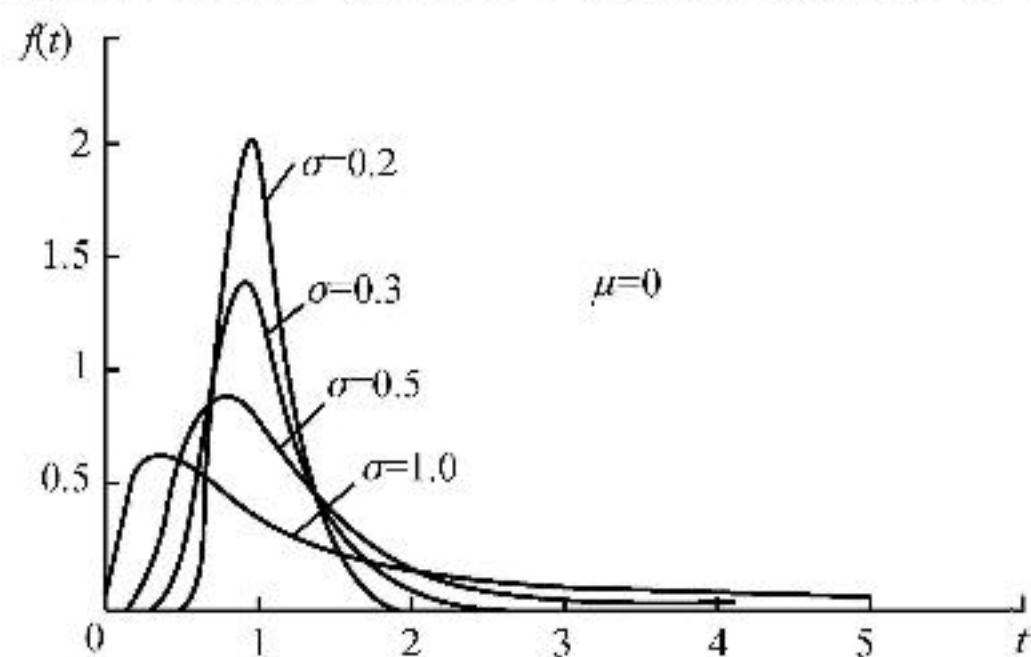


图 5.9 对数正态分布的失效密度函数图

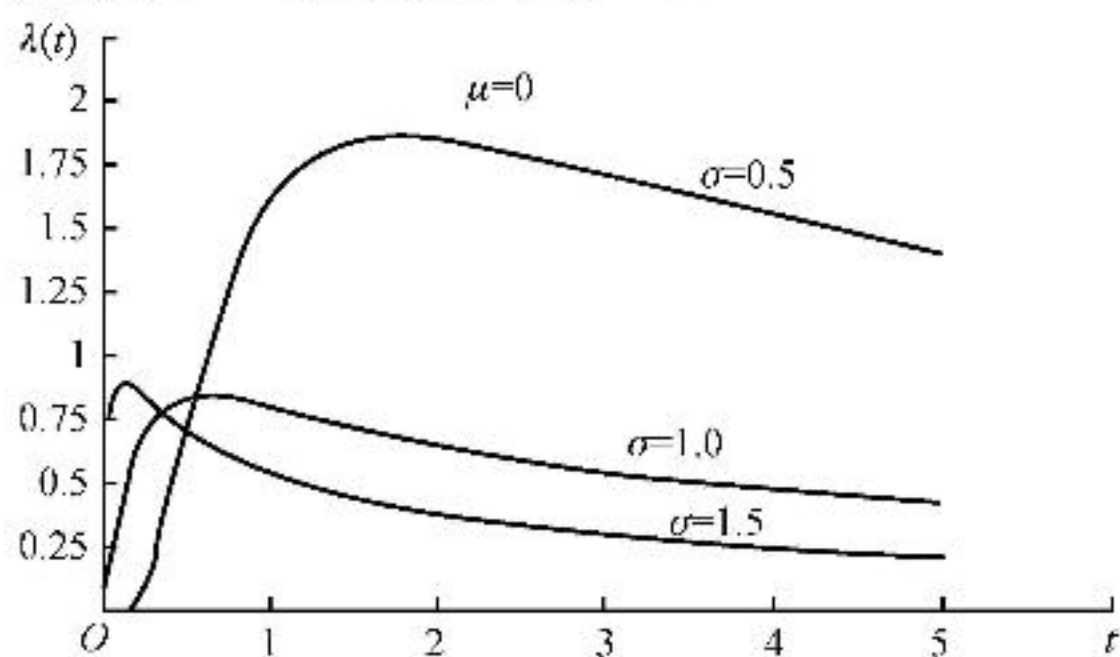


图 5.10 对数正态分布的失效率函数图

对数正态分布的平均寿命和方差分别为

$$\theta = E(\xi) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (5.39)$$

$$\sigma'^2 = \theta^2 (e^{\sigma^2} - 1) \quad (5.40)$$

注意此处的 σ' 是对数正态分布的标准差, 而参数 σ 不是其标准差。

可靠寿命为

$$t(R) = e^{u_1 - R \cdot \sigma} \quad (5.41)$$

对数正态分布近年来在可靠性领域中受到重视, 某些机械零件的疲劳寿命可用对数正态分布来分析, 尤其对于维修时间的分布, 一般都选用对数正态分布。

例 5.4 某厂生产的直径 5 mm 的钢丝弹簧, 要求承受耐剪力强度为 $30 \times 10^3 \text{ N/cm}^2$, 且弹簧在工作应力条件下承受 10^6 次载荷循环以后立即更换。根据以往的试验, 该弹簧在恒定应力条件下的疲劳寿命服从参数 $\mu = 6.139\ 9$, $\sigma = 0.103\ 5$ 的对数正态分布。试问在更换之前, 弹簧失效的可能性有多大? 若要保证更换前具有 99 % 的可靠度, 应在多少次循环前更换?

解: 首先应计算在 10^6 次循环弹簧的失效概率:

$$F(10^6) = \Phi\left(\frac{\ln 10^6 - 6.139\ 9}{0.103\ 5}\right) = \Phi(7.675\ 6) \approx 1$$

然后计算保证可靠度为 0.99 时的可靠寿命:

$$t(0.99) = e^{6.139\ 9 + u_{1-0.99} \times 0.103\ 5} = e^{6.139\ 9 + (-2.325) \times 0.103\ 5} = 364.768\ 4$$

故需在 364 次循环时更换。

5.4 威布尔分布

5.4.1 推导及物理背景

在实践中, 经常遇到这样的问题, 比如在一条金属环的链条的两端施加一个拉力, 当拉力达到某个强度时, 链条中的一个环断裂, 因此, 整个链条也就断裂。所以整个链条的使用寿命长度, 取决于各个金属环中最弱的金属环的寿命长度。因此, 人们关心所有环寿命的极值。设有 n 个环, 记第 i 个环的寿命长度为 $T_i (i=1, 2, \dots, n)$, 假设每个环的寿命分布均为 $F(t)$, T_1, T_2, \dots, T_n 相互独立, 它们从小到大排列为 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$, 记 $T_{(1)}$ 和 $T_{(n)}$ 为环的寿命 T_1, T_2, \dots, T_n 中的最小者和最大者。

$$\begin{aligned} P\{T_{(1)} > t\} &= P(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\} \cap \dots \cap \{T_n > t\}) = \\ &P(T_1 > t) \cdot P(T_2 > t) \cdot \dots \cdot P(T_n > t) = \\ &\{1 - F(t)\}^n \end{aligned}$$

因此, $T_{(1)}$ 的分布函数 $F_{T_{(1)}}(t) = 1 - \{1 - F(t)\}^n$ 称为最小极值分布, $T_{(n)}$ 的分布函数 $F_{T_{(n)}}(t) = \{F(t)\}^n$ 称为最大极值分布。当 $n \rightarrow \infty$ 时, $F_{T_{(1)}}(t)$ 或 $F_{T_{(n)}}(t)$ 将趋向于一个极限的分布函数, 称渐近分布。不同类型的渐近分布, 与 $F(t)$ 有关, 特别是 $F(t)$ 两边尾部的性质与渐近分布有直接关系, 根据 $F(t)$ 的不同类型, 有三种较典型的渐近分布。

极小值分布的情形:

$$\text{I 型} \quad F_s(t) = 1 - e^{-e^{(t-\gamma)/\eta}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \eta > 0$$

$$\text{II 型} \quad F_s(t) = 1 - e^{-[-(t-\gamma)/\eta]^{-m}}, \quad -\infty < t \leq \gamma, \quad \eta, m > 0$$

$$\text{III 型} \quad F_s(t) = 1 - e^{-[(t-\gamma)/\eta]^m}, \quad \gamma \leq t < \infty, \quad \eta, m > 0$$

极大值分布的情形:

$$\text{I 型} \quad F_L(t) = e^{-e^{-(t-\gamma)/\eta}}, \quad -\infty < t < \infty, \quad \eta > 0$$

$$\text{II 型} \quad F_L(t) = e^{-[(t-\gamma)/\eta]^{-m}}, \quad \gamma \leq t < \infty, \quad \eta, m > 0$$

$$\text{III 型} \quad F_L(t) = e^{-[-(t-\gamma)/\eta]^m}, \quad -\infty < t \leq \gamma, \quad \eta, m > 0$$

其中, γ, η, m 分别为极值分布的位置参数、尺度参数和形状参数。特别, 极小值 III 型分布就是威布尔分布。

5.4.2 性 质

威布尔分布的失效密度函数为

$$f(t) = \frac{m}{t_0} (t - \gamma)^{m-1} e^{-(t-\gamma)^m/t_0} \quad (5.42)$$

失效分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-(t-\gamma)^m/t_0} \quad (5.43)$$

失效率函数为

$$\lambda(t) = \frac{m}{t_0} (t - \gamma)^{m-1} \quad (5.44)$$

当设 $t_0 = \eta^m$ 时, 上述三式可改写成

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t - \gamma}{\eta} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta} \right)^m} \quad (5.45)$$

$$F(t) = 1 - e^{-[(t-\gamma)/\eta]^m} \quad (5.46)$$

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta^m} (t - \gamma)^{m-1} \quad (5.47)$$

威布尔分布的参数有 3 个, m 称为形状参数, t_0 为尺度参数, γ 为位置参数。当 t_0 用 η^m 代替时, η 称为特征寿命或真尺度参数。当 $\gamma=0$ 时, 称其为两参数威布尔分布。

平均失效率为

$$\lambda_m(t) = \frac{1}{t - \gamma} \int_{\gamma}^t \lambda(x) dx = \frac{(t - \gamma)^{m-1}}{\eta^m} = \frac{1}{m} \lambda(t) \quad (5.48)$$

可靠度函数为

$$R(t) = e^{-(t-\gamma)^m/t_0} \quad \text{或} \quad R(t) = e^{-[(t-\gamma)/\eta]^m} \quad (5.49)$$

其分布的失效密度函数和失效率函数图形如图 5.11 和图 5.12 所示。

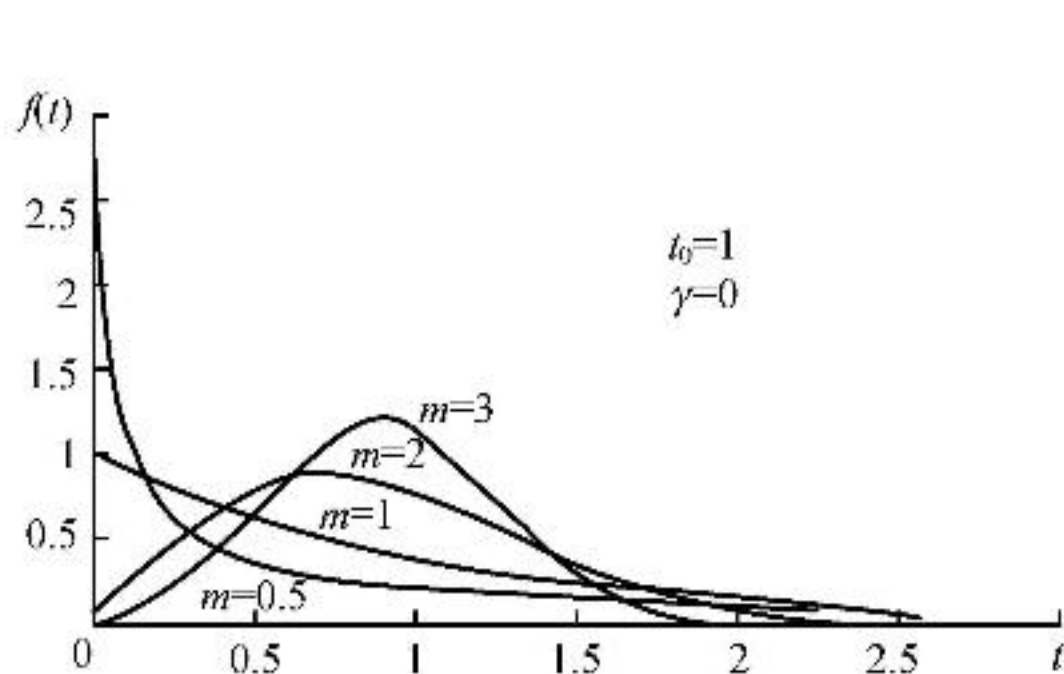


图 5.11 威布尔分布的失效密度函数图

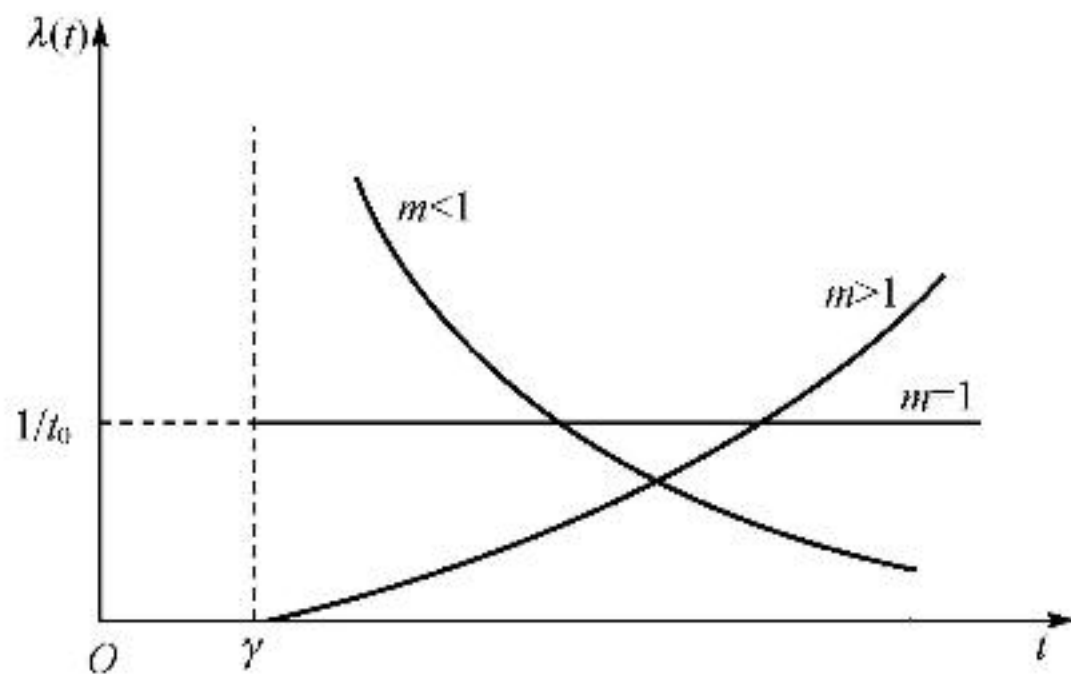


图 5.12 威布尔分布的失效率函数图

威布尔分布是一种很有用的分布。根据形状参数 m 的数值可以区分产品不同的失效类型。当 $m > 1$ 时,失效率随时间的变化为递增型——IFR (Increasing Failure Rate); 当 $m = 1$ 时,为恒定型——CFR (Constant Failure Rate); 当 $m < 1$ 时,为递减型——DFR (Decreasing Failure Rate)。

尺度参数 t_0 (或 η) 起到放大或缩小坐标尺度的作用,如图 5.13 所示。尺度参数往往与工作条件负载的大小有关,负载越大,尺度参数越小。

位置参数 γ 是一平移参数,如果作一个平移变换 $t' = t - \gamma$,那么式(5.42)将变成

$$f(t') = \frac{m(t')^{m-1}}{t_0} e^{-(t')^m/t_0} \quad (5.50)$$

由图 5.14 看出,当 $\gamma = 1/2$ 时,产品在 $t = 1/2$ (时间单位) 以前不发生失效,在 $t = 1/2$ 以后发生失效;当 $\gamma = 0$ 时,产品在工作一开始就逐渐发生失效;对于 $\gamma = -1/2$ 的情形,表示产品在寿命试验开始之前就有失效产品,当产品没有经过必要的筛选就进行寿命试验时,往往发生这种情形。

参数 $\gamma > 0$, 有时也称做最小保证寿命,即产品在时间 $t = \gamma$ 以前不发生失效。

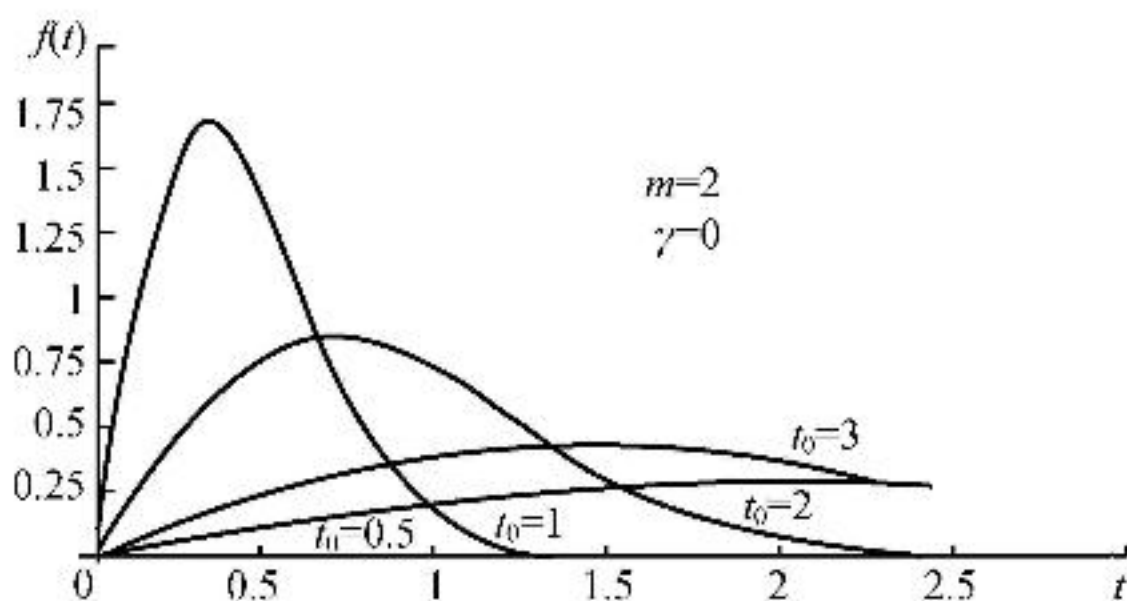


图 5.13 威布尔分布密度函数随尺度的变化

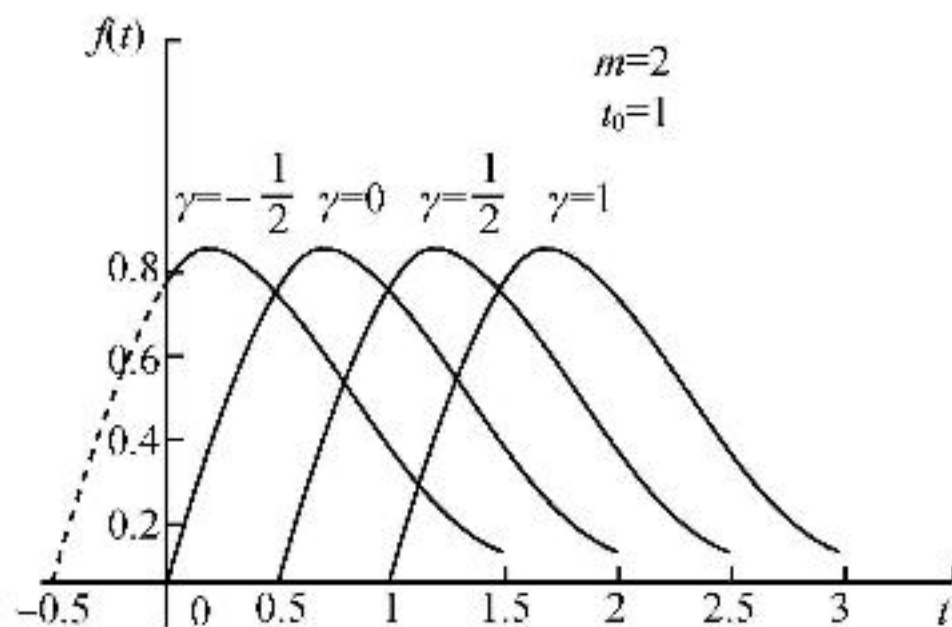


图 5.14 威布尔分布密度函数随位移的变化

威布尔分布的平均寿命为

$$E(\xi) = \theta = \gamma + \eta\Gamma(1 + 1/m) \tag{5.51}$$

其中, $\Gamma(1+1/m)$ 为 Γ 函数, 可查表 5.2。其寿命的方差为

$$\text{var}(\xi) = \eta^2 \{ \Gamma(1 + 2/m) - [\Gamma(1 + 1/m)]^2 \} \tag{5.52}$$

可靠寿命为

$$t(R) = \gamma + \eta(-\ln R)^{1/m} \tag{5.53}$$

中位寿命为

$$t(0.5) = \gamma + \eta(\ln 2)^{1/m} \tag{5.54}$$

特征寿命为

$$t(e^{-1}) = \gamma + \eta \tag{5.55}$$

表 5.2 $\Gamma(x)$ 数值表

m	$\Gamma(1+1/m)$	m	$\Gamma(1+1/m)$	m	$\Gamma(1+1/m)$	m	$\Gamma(1+1/m)$
0.1	10!	1.1	0.965	2.1	0.886	3.1	0.894
0.2	5!	1.2	0.941	2.2	0.886	3.2	0.896
0.3	9.260	1.3	0.924	2.3	0.886	3.3	0.897
0.4	3.323	1.4	0.911	2.4	0.886	3.4	0.898
0.5	2.000	1.5	0.903	2.5	0.887	3.5	0.900
0.6	1.505	1.6	0.897	2.6	0.888	3.6	0.901
0.7	1.266	1.7	0.892	2.7	0.889	3.7	0.902
0.8	1.133	1.8	0.889	2.8	0.890	3.8	0.904
0.9	1.052	1.9	0.887	2.9	0.892	3.9	0.905
1.0	1.000	2.0	0.886	3.0	0.893	4.0	0.906

威布尔分布与其他分布之间存在一定的关系。例如, 两参数威布尔分布, 经过变量转换可变成单参数指数分布, 即

$$F(t) = \int_0^t \frac{m}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m} dx$$

令 $y=x^m$, 得

$$F(t) = \int_0^{t^m} \frac{1}{\eta^m} e^{-\frac{y}{\eta^m}} dy$$

令 $z=t^m, \theta=\eta^m$, 得

$$F(z) = \int_0^Z \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} dy \tag{5.56}$$

即为单参数指数分布函数的表达式, 参数 $\theta=\eta^m$ 。

两参数威布尔分布又可以转化成极值分布, 即

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}$$

设 $\mu = \ln \eta$, $\sigma = 1/m$, $x = \ln t$, 则

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^m} = 1 - e^{-e^{m(\ln t - \ln \eta)}} = 1 - e^{-e^{(x-\mu)/\sigma}} = G(x) \quad (5.57)$$

称 $G(x) = 1 - e^{-e^{(x-\mu)/\sigma}}$ 为极值分布函数。

当威布尔分布参数 $m=3\sim 4$ 时, 其与正态分布的形状很近, 如图 5.15 所示, 图中虚线是正态分布密度曲线, 其参数均值 $\mu=0.896\ 3$, 标准差 $\sigma=0.303$; 实线是威布尔分布密度曲线, 参数 $m=3.25$, $\eta=1$, $\gamma=0$ 。

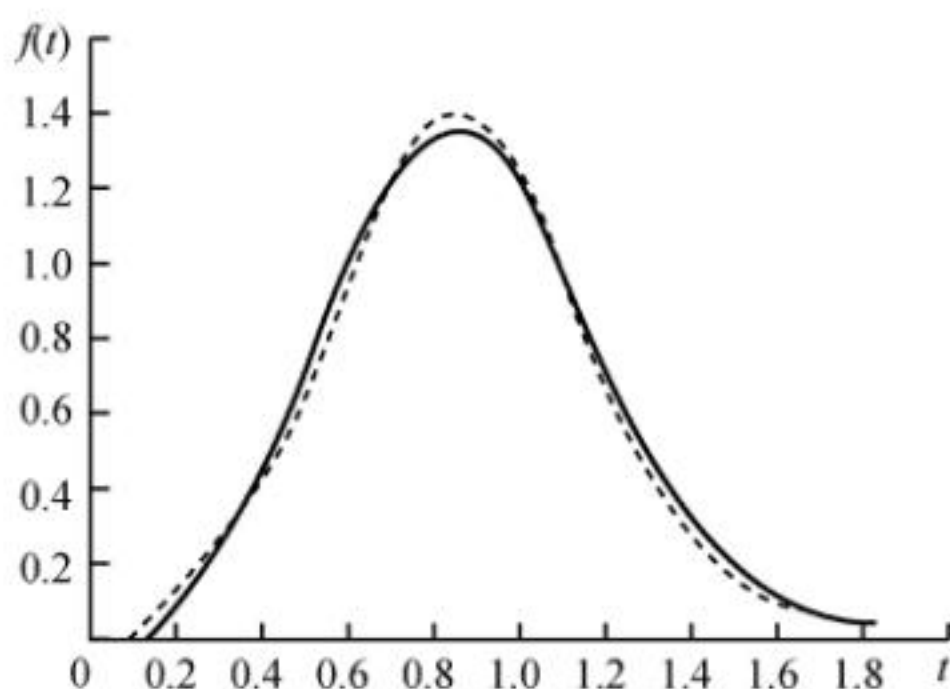


图 5.15 威布尔分布密度与正态分布密度的比较

由于威布尔分布和其他分布的关系比较密切, 且其形状参数取值范围反映了产品失效特性, 因此它对各种类型试验数据的适应能力较强, 其应用比较广泛。

例 5.5 某发射管的失效时间服从威布尔分布, 其参数 $m=2$, $\eta=1\ 000\ \text{h}$ 。试确定当任务时间为 $100\ \text{h}$ 时, 发射管的可靠度及工作 $100\ \text{h}$ 后的失效率。

解:

$$R(100) = e^{-\left(\frac{100}{1\ 000}\right)^2} = 0.99$$

$$\lambda(100) = \frac{2}{1\ 000} \cdot \left(\frac{100}{1\ 000}\right)^{2-1} \text{h}^{-1} = 0.000\ 2\ \text{h}^{-1}$$

5.5 混合分布与竞争性故障模型

前面介绍的各种寿命分布均为典型的单一分布, 但在数据处理时, 往往会碰到一些情况, 不能用某一分布进行拟合或分析, 因此这里介绍混合分布和竞争性故障模型。

5.5.1 混合分布

被混合的分布属于同一分布类型, 但它们的参数不同。设 $F_i(t)$ 是随机变量 X_i 的分布函

数, $i=1,2,\cdots,k$ 。于是一个 k 重混合累积分布函数被定义为

$$F(t) = \sum_{i=1}^k p_i F_i(t), \quad 0 \leq p_i \leq 1 \text{ 且 } \sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad (5.58)$$

通常 $F_i(t)$ 为第 i 个随机变量 X_i (也称其为子总体) 的分布函数, p_i 称为混合参数。

k 重混合概率密度函数为

$$f(t) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(t) \quad (5.59)$$

其中, $f_i(t)$ 是第 i 个子总体的概率密度函数。

通常在可靠性中用到多重威布尔分布, 例如二重威布尔分布的混合分布函数为

$$F(t) = p \left[1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma_1}{\eta_1}\right)^{m_1}} \right] + (1-p) \left[1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma_2}{\eta_2}\right)^{m_2}} \right]$$

二重威布尔分布的混合分布密度函数为

$$f(t) = \frac{p m_1}{\eta_1} \left\{ \frac{t-\gamma_1}{\eta_1} \right\}^{m_1-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma_1}{\eta_1}\right)^{m_1}} + \frac{(1-p) m_2}{\eta_2} \left\{ \frac{t-\gamma_2}{\eta_2} \right\}^{m_2-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma_2}{\eta_2}\right)^{m_2}} \quad (5.60)$$

图 5.16 表示两个子总体参数分别为 $\eta_1 = \eta_2 = 1, m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 3, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0.4$, 而 $p = 0.2$ 的二重威布尔分布的密度函数的图形。

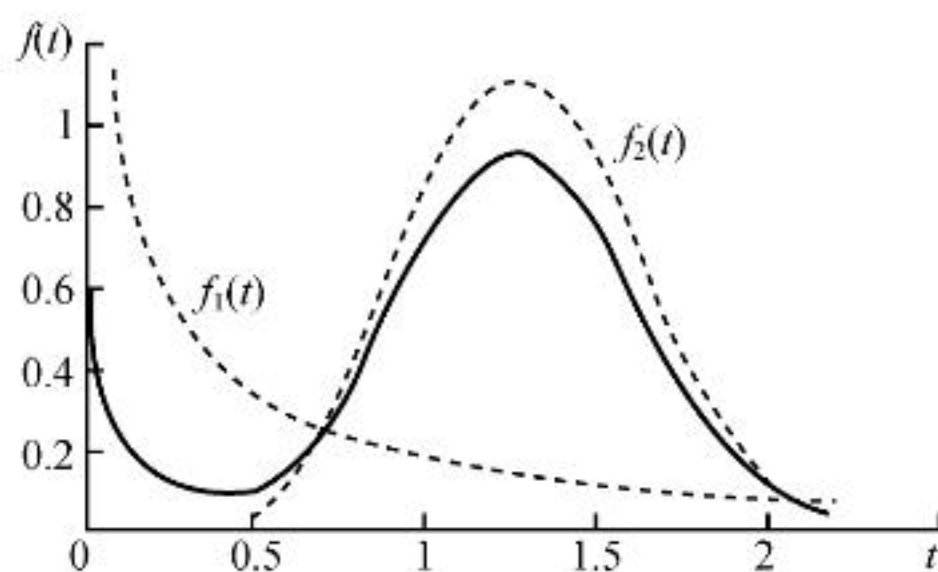


图 5.16 二重威布尔分布的密度函数图

二重威布尔分布的失效率为

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{p f_1(t) + (1-p) f_2(t)}{p R_1(t) + (1-p) R_2(t)} \quad (5.61)$$

平均寿命可表示为

$$\theta = p \theta_1 + (1-p) \theta_2 \quad (5.62)$$

其中, $\theta_j = \gamma_j + \eta_j \Gamma(1+1/m_j), j=1,2$ 。

混合分布可用于描述质量不同的产品按一定比例混合以后形成的总体, 质量不同是指在制造和生产批方面的差异。在进行数据处理时, 应先将不同质量的产品分开统计, 再进行混合处理。对于现场获得的数据, 就存在不同质量批混合的情况, 对此, 应对产品的出厂状况进行分析后, 再作处理。

5.5.2 竞争性故障模型

竞争性故障模型可定义为,如果系统有 K 种失效方式,而每一种失效方式都独立地作用于系统,且都对应一定的失效时间,其中任何一种失效都会引起系统失效,在所有的失效中,最早产生的那种失效出现时,将导致系统失效,即

$$T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_K\} \quad (5.63)$$

设 $F_i(t)$ 是 T_i 的累积失效分布函数,所以系统的累积失效分布函数为

$$F(t) = 1 - \prod_{i=1}^K [1 - F_i(t)] \quad (5.64)$$

其中, $F_i(t)$ 可以是不同的分布,但要求这 K 个分布必须是独立的,如它们之间不独立,即一种失效引起另一种失效,则必须考虑它们之间的相互影响,需要对上式进行修正。

这种分布模型与混合分布模型之间的根本差别是在 K 种失效机理独立作用时,任一种失效就引起系统失效。混合分布是各种失效因素都在起作用,系统失效取决于它们按比例混合以后的寿命。下面写出竞争性模型累积失效分布函数的通用表达式。

任一个失效因素起作用时,对应的可靠度为

$$R_i(t) = 1 - F_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(x) dx}$$

其中, $\lambda_i(t)$ 是对应第 i 个失效因素的失效率。当 K 个因素同时起作用时,系统的可靠度将为

$$R(t) = \prod_{i=1}^K e^{-\int_0^t \lambda_i(x) dx} = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^K \lambda_i(x) dx} \quad (5.65)$$

系统的总失效率将是对应时刻 t 的 K 个独立的失效率之和,即

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_K(t) \quad (5.66)$$

显然对于 K 个常数失效率,则系统为指数分布;对于一般威布尔分布,设任一失效分布的参数为 $m_i, \eta_i, \gamma_i = 0$, 则其失效率函数为

$$\lambda_i(t) = m_i \eta_i^{-m_i} t^{m_i-1}$$

所以系统的失效分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^K m_i \eta_i^{-m_i} x^{m_i-1} dx} \quad (5.67)$$

$$R(t) = e^{-\sum_{i=1}^K \left(\frac{t}{\eta_i}\right)^{m_i}} \quad (5.68)$$

如果 $m_i = m$, 则上式将成为

$$R(t) = e^{-t^m \sum_{i=1}^K \eta_i^{-m}} \quad (5.69)$$

这说明,若 K 个失效方式具有相同的形状参数 m , 尺度参数 η_i 不同,那么系统将具有形状参数为 m 和尺度参数为 $\left(\sum_{i=1}^K \eta_i^{-m}\right)^{-1}$ 的威布尔分布。在分析一个产品的失效时,当找出各个主要部

件的失效分布后,应用该模型即可得到产品的失效分布。

例 5.6 某产品由两个主要部件组成,现场记录了 9 台产品因两部件分别失效而引起的失效时间,如表 5.3 所列,单位:h。计算系统的失效率并给出系统可靠度的计算方法。

表 5.3 部件失效时间表 h

A 部件	B 部件	A 部件	B 部件
18.1	35.2	105.2	205.6
40.0	74.6	214.8	
67.5	111.2		

解: 在对系统进行分析前,先分别对 A,B 部件进行分析。当对 A 部件进行分析时,由 B 部件引起的故障可作为中断信息,按平均秩次法计算经验分布函数。其试验样本如图 5.17 所示,具体计算见表 5.4。当对 B 部件进行分析时,A 部件的失效信息作为中断信息,B 部件的经验分布函数计算见表 5.5。对系统的分析用竞争性模型处理,系统失效率为

$$\begin{aligned}\lambda_s(t) &= 1.322 \times (161.955)^{-1.322} t^{0.322} + \\ &1.769 \times (179.370)^{-1.769} t^{0.769} = \\ &0.0016 t^{0.322} + 0.0002 t^{0.769}\end{aligned}$$

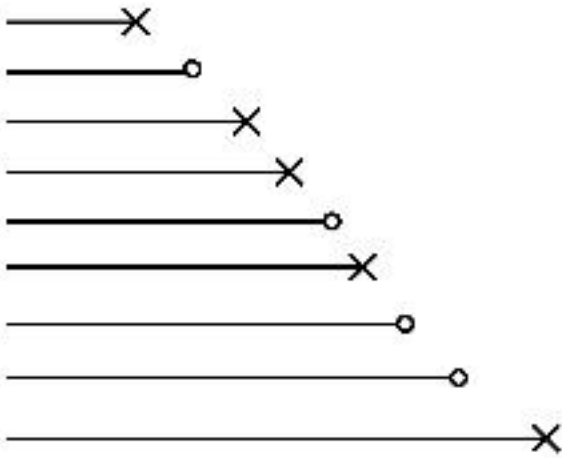


图 5.17 部件寿命试验示意图

而系统可靠度函数可用式(5.68)计算。

表 5.4 A 部件寿命分布计算表

i	t/h	k	A_k	$F_n(t_i)$	i	t/h	k	A_k	$F_n(t_i)$
1	18.1	1	1	0.074 5	6	105.2	4	4.6	0.457 4
2	35.2				7	111.2			
3	40	2	2.125	0.194 1	8	205.6			
4	67.5	3	3.25	0.313 8	9	214.8	5	7.3	0.744 7
5	74.6				A 部件的寿命分布参数 $m=1.322, \eta=161.955$				

表 5.5 B 部件寿命分布计算表

i	t/h	k	A_k	$F_n(t_i)$	i	t/h	k	A_k	$F_n(t_i)$
1	18.1				6	105.2			
2	35.2	1	1.111 1	0.086 29	7	111.2	3	4.444 4	0.440 9
3	40				8	205.6	4	6.296 3	0.637 9
4	67.5				9	214.8			
5	74.6	2	2.592 6	0.243 9	B 部件的寿命分布参数 $m=1.769, \eta=179.370$				

5.6 统计量的分布

5.6.1 顺序统计量的分布

设子样 T_1, T_2, \dots, T_n 是来自总体 ξ 的一个样本, 其值为 t_1, t_2, \dots, t_n , 将其按大小顺序进行排列, 则称随机变量 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(i)} \leq \dots \leq T_{(n)}$ 为顺序统计量, 其中 $T_{(1)}$ 为最小顺序统计量, $T_{(n)}$ 为最大顺序统计量, $T_{(i)}$ 为第 i 个顺序统计量。

对于一次实际的寿命试验, 可得到一组顺序统计量的观测值

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(i)} \leq \dots \leq t_{(n)}$$

注意, 这一组数值是一组确定的值, 它不再是顺序统计量, 也不是随机变量。

定数截尾寿命试验在第 r 个失效时停止试验, 其顺序统计量为

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(i)} \leq \dots \leq T_{(r)}$$

定时截尾寿命试验在给定的时间 t_0 时停止试验, 失效 r 个, 其顺序统计量为

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(i)} \leq \dots \leq T_{(r)} \leq t_0$$

顺序统计量是相互不独立的随机变量, 它与样本 T_1, T_2, \dots, T_n 不同, 后者是独立同分布的, 在任一次试验中, 它们的取值是随机的、互相没有约束, 但顺序统计量互相之间有约束, 当第一个顺序统计量取某值时, 第二个顺序统计量的取值必定大于或等于它, 因此它们之间不独立, 并且分布也不同。

设总体 ξ 的分布函数为 $F(t)$, 密度函数为 $f(t)$, 则对样本量为 n 的样本, 其第 K 个顺序统计量 $T_{(K)}$ 的分布密度函数为

$$f_{T(K)}(t) = n C_{n-1}^{K-1} [F(t)]^{K-1} [1 - F(t)]^{n-K} f(t) \quad (5.70)$$

根据多项式分布可证明上式, 在此先介绍一下多项式分布。假设进行了 n 次随机试验, 每次试验的结果必定出现事件 $A_j (j=1, 2, \dots, m)$ 中的一个, 且这些 A_j 是互斥的。出现事件 A_j 的概率为 $P_j = P(A_j)$, 且

$$P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1 \quad (5.71)$$

n 次试验结果相互独立。在 n 次试验中 A_j 可能出现 K_j 次, $K_j = 1, 2, \dots, n$ 。设随机向量 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$, 其中 $X_j = K_j$ 表示事件 A_j 恰好出现 K_j 次, 与二项分布的导出相同, 可得到随机向量 $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$ 取 (K_1, K_2, \dots, K_m) 的概率:

$$P(X_1 = K_1, \dots, X_m = K_m) = \frac{n!}{K_1! K_2! \dots K_m!} P_1^{K_1} \cdot P_2^{K_2} \cdot \dots \cdot P_m^{K_m} \quad (5.72)$$

其中, $K_1 + K_2 + \dots + K_m = n$ 。

式(5.72)给出了下列诸事件的积事件出现的概率: A_1 恰好出现 K_1 次, A_2 恰好出现

K_2 次, \dots, A_m 恰好出现 K_m 次。概率论中定义随机向量 (X_1, X_2, \dots, X_m) 以式 (5.72) 所确定的函数为概率函数, 则称该随机向量服从多项式分布。

现在回到对式 (5.70) 的证明。对于任意给定的 t 值, 取 $\Delta t > 0$, $(t, t + \Delta t)$ 为一有限区间, 求第 K 个顺序统计量在 $(t, t + \Delta t)$ 上取值的概率, 将此事件记为 A , 则

$$P(A) = P\{t < T_{(K)} \leq t + \Delta t\} \quad (5.73)$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 以 $f_{T_{(K)}}(t)$ 表示第 K 个顺序统计量的密度函数, 则式 (5.73) 可写成

$$P\{t < T_{(K)} \leq t + \Delta t\} = f_{T_{(K)}}(t) \cdot \Delta t \quad (5.74)$$

如果 $T_{(K)}$ 取值在 $(t, t + \Delta t)$ 内, 那么子样 T_1, T_2, \dots, T_n 中必定有一个观测值落入此区间, 有 $K-1$ 个观测值小于或等于 t , 有 $n-K$ 个观测值大于 $t + \Delta t$ 。将上述情况分别用事件 A_1, A_2, A_3 表示 (见图 5.18), 即 A_1 代表有一个观测值落在 $(t, t + \Delta t)$ 区间内, 其概率为

$$P(A_1) = f(t) \cdot \Delta t \quad (5.75)$$

A_2 代表观测值小于或等于 t 的事件, 其概率为

$$P(A_2) = F(t) \quad (5.76)$$

A_3 代表观测值大于或等于 $t + \Delta t$ 的事件, 其概率为

$$P(A_3) = 1 - F(t + \Delta t) \quad (5.77)$$

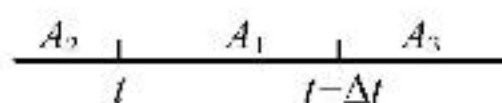


图 5.18 事件 A_1, A_2, A_3 的示意图

根据多项式分布, 而且 A 事件发生恰好是 A_1, A_2, A_3 三个事件的积事件发生, 则由式 (5.75)~式 (5.77) 可知, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_{T_{(K)}}(t) &= \frac{n!}{(K-1)!1!(n-K)!} [F(t)]^{K-1} \cdot f(t) \cdot [1-F(t)]^{n-K} = \\ &= n \cdot C_{n-1}^{K-1} [F(t)]^{K-1} [1-F(t)]^{n-K} \cdot f(t) \end{aligned} \quad (5.78)$$

由此可知, 当已知总体的分布函数 $F(t)$ 和密度函数 $f(t)$ 时, 即可写出任一个顺序统计量的密度函数, 如最小顺序统计量 $T_{(1)}$ 的分布为

$$f_{T_{(1)}}(t) = nf(t)[1-F(t)]^{n-1} \quad (5.79)$$

最大顺序统计量 $T_{(n)}$ 的分布为

$$f_{T_{(n)}}(t) = nf(t)[F(t)]^{n-1} \quad (5.80)$$

设顺序统计量 $T_{(r)}$ 和 $T_{(K)}$ ($r < K$), 它们联合分布的密度函数为

$$\begin{aligned} f_{T_{(r)}, T_{(K)}}(t_K, t_r) &= \frac{n!}{(r-1)!(K-r-1)!(n-K)!} [F(t_r)]^{r-1} \cdot \\ &\quad [F(t_K) - F(t_r)]^{K-r-1} \cdot [1-F(t_K)]^{n-K} \cdot f(t_r)f(t_K) \end{aligned} \quad (5.81)$$

其证明可仿照式 (5.70) 的证明进行。

5.6.2 样本经验分布函数 $F_n(t)$ 的分布

经验分布函数 $F_n(T_{(K)})$ 也是一个随机变量,对于不同的试验子样,它的取值是不同的。对式(5.70)进行变量置换 $Y=F_n(T_{(K)})$,并利用概率密度函数的变换,得到

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(K-1)!(n-K)!} \cdot y^{K-1} (1-y)^{n-K} \quad (5.82)$$

上式表示贝塔分布 $\beta(K, n-K+1)$ 的密度函数,其分布函数(又称不完全贝塔函数比)可表示为

$$I_y(K, n-K+1) = \int_0^y f_Y(t) dt \quad (5.83)$$

当失效数是 r 时,中位秩是当 $I_y(r, n-r+1)=0.5$ 时 $F_n(T_{(r)})=y$ 的值,也就是方程 $\int_0^y f_Y(t) dt=0.5$ 的解;平均秩则是贝塔分布的数学期望

$$E(\xi) = \frac{r}{n+1} \quad (5.84)$$

5.6.3 各种截尾样本的联合分布

设随机变量 T 的寿命分布函数为 $F(t)$,密度函数为 $f(t)$ 。以下给出可靠性试验中常用的几种试验子样的联合密度函数。

1. 完全寿命试验子样

设 n 为试验样本的样本量,将两个顺序统计量的联合分布推广到 n 个顺序统计量的联合分布,容易得到其联合密度函数。设 n 个顺序统计量为

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(n)}$$

相应的观测值为 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$,则其联合密度函数为

$$f_{T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = n! \prod_{i=1}^n f(t_i) \quad (5.85)$$

2. 定数截尾试验子样

试验 n 个样品中 r 个失效,其顺序统计量为

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(r)}$$

相应的观测值为 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r$,则其联合密度函数为

$$f_{T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(r)}}(t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] \cdot [1-F(t_r)]^{n-r} \quad (5.86)$$

3. 定时截尾试验子样

试验截止时间为 t_0 ,其中 r 个失效,其顺序统计量为

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \cdots \leq T_{(r)} \leq t_0$$

相应的观测值为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r \leq t_0$, 则其联合密度函数为

$$f_{T(1), T(2), \dots, T(r)}(t_1, t_2, \dots, t_r, t_0) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(t_i) \right] \cdot [1 - F(t_0)]^{n-r} \quad (5.87)$$

4. 随机截尾试验子样

随机截尾试验子样, 也称逐次截尾试验子样, 可分为定数逐次截尾和定时逐次截尾。定数逐次截尾指在每个失效时间 t_i , 从未失效的样品中随机抽取 b_i 个中止试验, 即失效样品为 r 个, 删除样品为 $\sum_{i=1}^r b_i$ 个, $n = r + \sum_{i=1}^r b_i$, 将总删除样品记为 K , 则 $K = \sum_{i=1}^r b_i$ 。定时逐次截尾是指在失效时间以外的时刻, 有 K 个样品删除, 若失效时间为 t_1, t_2, \dots, t_r , 并且对删除时间为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, 在任一 τ_i 时刻, 若有 b_i 个样品删除, 则总删除数 $K = \sum_{j=1}^p b_j$, $n = r + K$ 。

在本书中不明确区分定数或定时逐次截尾试验子样时, 都称为随机截尾试验子样。在 n 个样品中失效 r 个, 失效时间依次为 t_1, t_2, \dots, t_r , 删除时间依次为 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ 。其联合密度函数为

$$f_{T(1), T(2), \dots, T(r)}(t_1, t_2, \dots, t_r, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K) = C \cdot \prod_{i=1}^r f(t_i) \prod_{j=1}^K [1 - F(\tau_j)] \quad (5.88)$$

由于每个失效时刻和删除时刻的先后顺序有可能不同, 故式(5.88)中的 C 不能用一个统一的表达式表示, 此处暂以 C 代之, 因为在实际应用中, 其大小无影响。

5.6.4 常用的线性型统计量的分布

在可靠性数据分析中, 线性统计量具有重要的地位。因为这类统计量常常具有良好的统计性质。尽管某些线性统计量的统计性质稍差, 但由于计算方便, 也经常被采用。常用的线性统计量有两种类型, 一种是关于样本中的各个观测值的线性组合。如果样本为 X_1, X_2, \dots, X_n , 而 a_0, a_1, \dots, a_n 是已知常数, 则线性型的统计量为

$$L(X) = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (5.89)$$

第二种类型是关于样本顺序统计量的线性组合。如果样本的顺序统计量是 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, 而 b_0, b_1, \dots, b_n 是已知常数, 则线性型的统计量为

$$L(X_{(n)}) = b_0 + b_1 X_{(1)} + \dots + b_n X_{(n)} \quad (5.90)$$

下面列举一些在数理统计和可靠性研究中经常遇到的重要的线性型统计量及其分布的例子。

① 令 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立, 并且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i=1, 2, \dots, n$), 若 a_i ($i=1, 2, \dots, n$) 不全为零, 则

$$L(X) = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right) \quad (5.91)$$

② 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, 2, \dots, n)$, 并且相互独立, 则

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n) \quad (5.92)$$

③ 如果 X_1 和 X_2 相互独立, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, 2)$, 记 $U = X_1 - X_2$, 则

$$U \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \quad (5.93)$$

④ 假设 X 服从指数分布, 即

$$X \sim \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

且 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(r)}$ 为其无替换定数截尾试验子样, n 为投试样品个数, 令

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= nX_{(1)} \\ Y_i &= (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \quad 2 \leq i \leq r \end{aligned} \right\} \quad (5.94)$$

则 $Y_i (i=1, 2, \dots, r)$ 相互独立同分布于指数分布 $\frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, y > 0$ 。

⑤ 在④的假设条件下, 则

$$\hat{\theta}_{r,n} = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} \right] \quad (5.95)$$

的密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_{r,n}}(z, \theta) = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{r}{\theta} \right)^r z^{r-1} e^{-rz/\theta}, \quad z \geq 0$$

即

$$\frac{2r}{\theta} \hat{\theta}_{r,n} \sim \chi^2(2r) \quad (5.96)$$

⑥ 假设 X 服从指数分布, 即

$$X \sim \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0$$

有 n 个试样同时投试, 并且是有替换定数截尾寿命试验, 记 $X_{(i)} (i=1, 2, \dots, r)$ 为从寿命试验开始到第 $i (i=1, 2, \dots, r)$ 个失效的试样失效时的累积时间, r 为规定的停止个数。令

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= nX_{(1)} \\ Y_i &= n(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \quad 2 \leq i \leq r \end{aligned} \right\} \quad (5.97)$$

则 $Y_i (i=1, 2, \dots, r)$ 相互独立同分布于指数分布 $\frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, y \geq 0$ 。

⑦ 在⑥的假设条件下, 则

$$\hat{\theta}_{r,n} = \frac{n}{r} X_{(r)} \quad (5.98)$$

的密度函数为

$$f_{\hat{\theta}_{r,n}}(z, \theta) = \frac{1}{(r-1)!} \left(\frac{r}{\theta} \right)^r z^{r-1} e^{-rz/\theta}, \quad z > 0$$

或

$$\frac{2r}{\theta}\hat{\theta}_{r,n} \sim \chi^2(2r) \quad (5.99)$$

⑧ 如果 X 服从两参数的指数分布, 即

$$X \sim \frac{1}{\theta} e^{-(x-\gamma)/\theta}, \quad x \geq \gamma, \quad \theta > 0$$

且 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}$ 为无替换定数截尾试验子样, n 为投试样品个数, 则

$$Y_i = (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \quad i = 1, 2, \cdots, r, \quad 1 \leq r \leq n \quad (5.100)$$

(其中 $X_{(0)} = \gamma$) 相互独立同分布于 $f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}$; 而 γ 已知时, 令

$$T_{r,n} = \sum_{i=1}^r (X_{(i)} - \gamma) + (n-r)(X_{(r)} - \gamma) \quad (5.101)$$

则

$$2T_{r,n}/\theta \sim \chi^2(2r) \quad (5.102)$$

若

$$T'_{r,n} = \sum_{i=1}^r (X_{(i)} - X_{(1)}) + (n-r)(X_{(r)} - X_{(1)}) \quad (5.103)$$

则 $X_{(1)}$ 与 $T'_{r,n}$ 独立, 并且

$$2T'_{r,n}/\theta \sim \chi^2(2r-2) \quad (5.104)$$

⑨ 如果在⑥的假设条件下, X 服从两参数指数分布, 即

$$X \sim \frac{1}{\theta} e^{-(x-\gamma)/\theta}, \quad x \geq \gamma, \quad \theta > 0$$

令

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= n(X_{(1)} - \gamma) \\ Y_i &= n(X_{(i)} - X_{(i-1)}), \quad 2 \leq i \leq r \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

则 $Y_i (i=1, 2, \cdots, r)$ 相互独立于 $f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}, y \geq 0$, 并且若

$$T'_{r,n} = n(X_{(r)} - X_{(1)}) \quad (5.106)$$

则

$$2T'_{r,n}/\theta \sim \chi^2(2r-2) \quad (5.107)$$

习 题

5.1 设 X_1, X_2, \cdots, X_n 独立同分布, 其共同分布函数为 $F(x)$, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ 是 X_1, X_2, \cdots, X_n 的顺序统计量。证明:

① 对一切 $1 \leq i \leq n$, 有

$$P(X_{(i)} \leq x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^{F(x)} u^{i-1} (1-u)^{n-i} du$$

② 若 $F(x)$ 是连续函数, 则

$$E[F(X_{(i)})] = \frac{i}{n+1}$$

$$\text{var}[F(X_{(i)})] = \frac{i(n+1-i)}{(n+1)^2(n+2)}$$

5.2 如果习题 5.1 中的分布 $F(x)$ 是参数为 λ 的指数分布, 试计算最小顺序统计量 $X_{(1)}$ 的分布, 并给出其期望与方差。

5.3 如果习题 5.1 中的分布 $F(x)$ 为威布尔分布 $W(m, \eta)$, 试计算最小顺序统计量 $X_{(1)}$ 的分布, 并给出其期望与方差。

5.4 请读者思考一下竞争性故障(失效)模型与串联系统的联系与区别。

第2篇 单元可靠性评估

第6章 指数分布的统计推断

指数分布是一种非常重要的寿命分布类型,在许多方面的可靠性分析中,都以指数分布作为假定的寿命分布,并以此为根据作统计推断,特别是电子产品。本章主要介绍指数分布参数的估计,包括点估计与区间估计。

6.1 指数分布参数的极大似然估计

6.1.1 单参数指数分布的极大似然估计

本小节假定所有试验样品的寿命变量相互独立,并且服从单参数指数分布

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \text{或} \quad f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}, \quad t \geq 0$$

1. 完全样本情形

假定 n 个样品参加试验,全部做到失效,待估参数平均寿命 $\theta = 1/\lambda$, λ 为失效率。其似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda t_i} = \lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^n t_i\right)$$

其中, t_i 为第 i 个样品的失效时间, $i=1, 2, \dots, n$ 。对上式两边取对数,有

$$\ln L(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n t_i$$

求导得到似然方程

$$\frac{d \ln L(\lambda)}{d \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n t_i = 0$$

解之得

$$\hat{\lambda} = n / \sum_{i=1}^n t_i \quad (6.1)$$

于是平均寿命的估计为

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n t_i / n \quad (6.2)$$

简便起见,记 $T = \sum_{i=1}^n t_i$ 为总试验时间,则

$$\hat{\theta} = T/n \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = n/T \quad (6.3)$$

2. 无替换定数截尾试验

假设通过无替换定数截尾试验得到的顺序统计量观测值为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} (r < n)$, 其中 n 为样本数, r 为失效数, 则其似然函数可表示为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(t_{(1)}, t_{(2)}, \cdots, t_{(r)}, \theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r f(t_{(i)}) \right] \cdot [1 - F(t_{(r)})]^{n-r} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \left[\prod_{i=1}^r \frac{1}{\theta} e^{-t_{(i)}/\theta} \right] \cdot [e^{-t_{(r)}/\theta}]^{n-r} = \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \theta^{-r} e^{-\frac{1}{\theta} [\sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)}]} \end{aligned}$$

上式两边取对数并求导, 然后解对数似然方程, 得

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)} \right] \quad (6.4)$$

记 $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)}$ 为总试验时间, 则

$$\hat{\theta} = T/r \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = r/T \quad (6.5)$$

根据极大似然估计的性质易知, 可靠度 $R(t)$ 的极大似然估计为

$$\hat{R}(t) = e^{-t/\hat{\theta}} \quad (6.6)$$

可靠寿命 $t(R)$ 的估计为

$$\hat{t}(R) = \hat{\theta} \ln \frac{1}{R} \quad (6.7)$$

参数估计量的性质: $\hat{\theta}$ 为 θ 的唯一最小方差无偏估计(umvue), 而 $\hat{\lambda}$ 是有偏的, 在计算无偏估计量时, 应作如下修正, 即

$$\hat{\lambda}' = \frac{r-1}{r} \hat{\lambda} \quad (6.8)$$

则 $\hat{\lambda}'$ 为 λ 的无偏估计量。

例 6.1 已知某电子管的寿命服从指数分布, 随机抽取 20 只进行无替换定数截尾寿命试验, 得到前 5 个失效时间为 $t_{(1)} = 26$ h, $t_{(2)} = 64$ h, $t_{(3)} = 119$ h, $t_{(4)} = 145$ h, $t_{(5)} = 182$ h。求平均寿

命 θ , 失效率 λ , $t=50$ h 的可靠度与可靠度为 0.9 时的可靠寿命。

解: 电子管的总试验时间

$$T = \sum_{i=1}^5 t_{(i)} + (20 - 5)t_{(5)} = \\ (26 + 64 + 119 + 145 + 182) \text{ h} + (20 - 5) \times 182 \text{ h} = \\ 3\,266 \text{ h}$$

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} = \frac{3\,266 \text{ h}}{5} = 653.2 \text{ h}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\theta}} = 0.001\,53 \text{ h}^{-1}$$

$$\hat{R}(50) = e^{-50/653.2} = 0.926$$

$$\hat{t}(0.9) = 653.2 \text{ h} \times \ln \frac{1}{0.9} = 68.8 \text{ h}$$

3. 无替换定时截尾试验

如果 n 个样品参加试验, 至 t_0 时试验截止, 有 r 个样品失效, 其顺序统计量观测值为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} \leq t_0$, 则其似然函数为

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\prod_{i=1}^r \frac{1}{\theta} e^{-t_{(i)}/\theta} \right) (e^{-t_0/\theta})^{n-r} \quad (6.9)$$

对 $L(\theta)$ 取对数并求导, 然后求解似然方程, 得到 θ 的极大似然估计

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_0}{r} \quad (6.10)$$

记 $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_0$ 为总试验时间, 则式(6.10)可改写为

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{r}{T} \quad (6.11)$$

参数估计量的性质: $\hat{\theta}$ 是有偏的, 其无偏修正量很复杂; $\hat{\lambda}$ 也是有偏的, λ 的无偏估计为

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{t_0} \ln \left\{ \frac{n}{n-r} \right\} \quad (6.12)$$

当 n 充分大时, $\hat{\lambda}$ 和 $\tilde{\lambda}$ 是渐近最小方差的, 不过在 $0.2 < r/n < 0.8$ 时, 式(6.12)才能使用。根据极大似然估计的性质, 可类似给出可靠度和可靠寿命的估计。

例 6.2 假设有一批电子产品, 如果从中随机抽取 20 只产品作为试样, 同时进行寿命试验, 无替换地试验到 1 000 h 停止, 在此之前有 5 只试样失效, 其失效时间依次为 100 h, 400 h, 600 h, 800 h, 900 h, 其余 15 只未失效的试样进行到 1 000 h 停止, 试估计平均寿命 θ 、失效率

λ 、50 h 时的可靠度 $R(50)$ 和可靠度为 0.99 的可靠寿命 $t_{0.99}$ 。

解：总试验时间

$$T = \sum_{i=1}^5 t_{(i)} + (20 - 5)t_0 = \\ (100 + 400 + 600 + 800 + 900) \text{ h} + (20 - 5) \times 1\,000 \text{ h} = \\ 17\,800 \text{ h}$$

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} = \frac{17\,800 \text{ h}}{5} = 3\,560 \text{ h}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1}{3\,560 \text{ h}} = 2.81 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$$

$$\hat{R}(50) = e^{-\frac{50}{3\,560}} = 0.986$$

$$\hat{t}_{(0.99)} = \hat{\theta} \ln\left(\frac{1}{0.99}\right) = 3\,560 \text{ h} \times \ln\left(\frac{1}{0.99}\right) = 15.54 \text{ h}$$

4. 有替换定数截尾试验

设产品寿命服从指数分布。现从总体中抽取 n 个样品进行有替换试验，至规定失效数 r 时停止试验， r 个失效样品的失效时间相应的顺序统计量为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$ 。易得平均寿命 θ 的极大似然估计

$$\hat{\theta} = \frac{n t_{(r)}}{r} \quad (6.13)$$

相应的总试验时间 $T = n t_{(r)}$ ，则上式可写为

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{r}{T} \quad (6.14)$$

参数估计量的性质是： $\hat{\theta}$ 是 θ 的最小方差无偏估计量； $\hat{\lambda}$ 是 λ 的有偏估计，其无偏估计为

$$\hat{\lambda}' = \frac{r-1}{T} = \frac{r-1}{n t_{(r)}} \quad (6.15)$$

与前述相同，根据极大似然估计的性质，可求出可靠度和可靠寿命的估计。

例 6.3 某种类型的电子管，其寿命服从指数分布，随机抽取 20 只做有替换的寿命试验，并在第 5 个失效时刻停止寿命试验，从开始试验到第 5 只失效的时间为 407 h。试估计其平均寿命 θ 、失效率 λ 、100 h 时的可靠度 $R(100)$ 和可靠度为 0.95 时的可靠寿命 $t_{0.95}$ 。

解：电子管的总试验时间

$$T = n t_{(r)} = 20 \times 407 \text{ h} = 8\,140 \text{ h}$$

$$\hat{\theta} = T/r = 8\,140 \text{ h}/5 = 1\,628 \text{ h}$$

$$\hat{\lambda} = 1/\hat{\theta} = 1/1\,628 \text{ h} = 6.14 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$$

$$\hat{R}(100) = e^{-\frac{100}{1\,628}} = 0.94$$

$$\hat{t}_{0.95} = \hat{\theta} \ln \left(\frac{1}{0.95} \right) = 1\,628 \text{ h} \times \ln \left(\frac{1}{0.95} \right) = 83.51 \text{ h}$$

5. 有替换定时截尾试验

设产品寿命服从指数分布。现从总体中抽取 n 个样品进行有替换试验, 试验至 t_0 时停止。假定有 r 个失效, 其失效时间的顺序统计量为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} \leq t_0$ 。与上述情况类似, 有

$$\hat{\theta} = \frac{n t_0}{r} \quad (6.16)$$

这里总试验时间 $T = n t_0$, 则上式可表示为

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{r}{T} \quad (6.17)$$

参数估计量的性质: $\hat{\theta}$ 是 θ 的有偏估计量, $\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计。由极大似然估计的性质, 同样可给出可靠度和可靠寿命的估计。

例 6.4 有 30 台电子产品进行有替换试验, 试验进行到 100 h 停止, 在此之前有 5 台产品失效。试求平均寿命、失效率、产品工作至 50 h 的可靠度及可靠度为 0.9 的可靠寿命。

解: 该试验为有替换定时截尾试验, $t_0 = 100 \text{ h}$, $r = 5$, $n = 30$ 。

总试验时间 $T = n t_0 = 30 \times 100 \text{ h} = 3\,000 \text{ h}$

平均寿命 $\hat{\theta} = \frac{T}{r} = 3\,000 \text{ h} / 5 = 600 \text{ h}$

失效率 $\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\theta}} = 0.001\,667 \text{ h}^{-1}$

可靠度 $\hat{R}(50) = e^{-50/600} = 0.92$

可靠寿命 $\hat{t}(0.9) = 600 \text{ h} \ln \frac{1}{0.9} = 63.22 \text{ h}$

6. 随机截尾试验

从指数分布的总体中随机抽取 n 个样品进行寿命试验, 试验中有 r 个样品失效, 失效时间依次为 $t_{(1)}, t_{(2)}, \cdots, t_{(r)}$, 其中 k 个样品未失效, 中途撤离试验, 称为删除样品, 删除时间为 $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k$, 删除时间和失效时间可相同, 也可不同, 且 $n = r + k$ 。根据 5.6.3 小节导出的这种不完全子样的联合分布式(5.88), 写出似然函数为

$$L(\theta) = C \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{\theta} e^{-t_{(i)}/\theta} \right) \prod_{j=1}^k (e^{-\tau_j/\theta}) \quad (6.18)$$

解对数似然方程, 得

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{i=1}^r t_{(i)} + \sum_{j=1}^k \tau_j \right) / r \quad (6.19)$$

令总试验时间 $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + \sum_{j=1}^k \tau_j$, 则

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} \quad \text{或} \quad \hat{\lambda} = \frac{r}{T} \quad (6.20)$$

与前述情形类似,可给出可靠度和可靠寿命的估计。

例 6.5 有 11 部陀螺进行寿命试验,在发生第一部失效的时候,撤下 3 部未失效的陀螺;在第二部和第三部失效时,分别撤下 2 部未失效的陀螺,余下的一直到失效为止。失效数据如表 6.1 所列,设陀螺寿命服从指数分布,求平均寿命的估计值。

表 6.1 陀螺寿命试验数据

失效时间/h	失效数	删除数	失效时间/h	失效数	删除数
34	1	3	169	1	2
113	1	2	237	1	0

解: 该试验为随机截尾试验,样品数 $n=11$,失效数 $r=4$,删除数 $k=7$ 。

总试验时间

$$T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + \sum_{j=1}^k \tau_j = (34 + 113 + 169 + 237) \text{ h} + (3 \times 34 + 2 \times 113 + 2 \times 169) \text{ h} = 1\,219 \text{ h}$$

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} = 1\,219 \text{ h} / 4 = 304.75 \text{ h}$$

7. 定时间隔测试试验子样

抽取 n 个样品进行寿命试验,在时间 t_1, t_2, \dots, t_k 时进行观测,至 t_k 时停止试验。作如下假定:

① 随机抽取 n 个样品进行试验,并且样品的寿命服从单参数指数分布。

② 测试时间为 $0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \infty \equiv t_{k+1}$ 。

③ 具体失效时间落入时间间隔 (t_{i-1}, t_i) 中的个数为 r_i ($i=1, 2, \dots, k$), 因此,有 $n - \sum_{i=1}^k r_i$ 个落入 (t_k, ∞) 内,并且 r_i 是随机的。

总失效数为 $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $r_{k+1} = n - r$ 。至 t_k 截止时还有 $n - r$ 个未坏,则称为定时间隔测试截尾寿命试验。一个产品在测试间隔 (t_{i-1}, t_i) 内失效的概率为

$$P_i = P(t_{i-1} < T \leq t_i) = F(t_i) - F(t_{i-1}) = e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

则 r_i 个产品在测试间隔 (t_{i-1}, t_i) 内失效的概率为

$$P_i^{r_i} = (e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i})^{r_i}$$

而 $n-r$ 个产品到 t_k 时未失效的概率为

$$P_{k+1}^{n-r} = e^{-\lambda(n-r)t_k}$$

则似然函数为

$$L(\lambda) = C \left[\prod_{i=1}^k P_i^{r_i} \right] P_{k+1}^{n-r} = C \prod_{i=1}^k (e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i})^{r_i} \cdot e^{-\lambda(n-r)t_k} \quad (6.21)$$

其中, C 为常数。对上式取对数并求导得似然方程

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^k r_i \frac{t_i e^{-\lambda t_i} - t_{i-1} e^{-\lambda t_{i-1}}}{e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i}} - (n-r)t_k = 0 \quad (6.22)$$

上式为超越方程,需要数值求解。设测试间隔 $h_i = t_i - t_{i-1} (i=1, 2, \dots, k)$, 对于等时间间隔测试的特殊情况, $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h$, 相应的测试时间为 $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_k = kh$, 则方程式(6.22)可写为

$$\sum_{i=1}^k r_i \frac{i(1 - e^{h\lambda} + e^{h\lambda})}{e^{h\lambda} - 1} - (n-r)k = 0$$

经化简可得

$$e^{h\lambda} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^k r_i}{(n-r)k + \sum_{i=1}^k r_i(i-1)}$$

故

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{h} \ln \left[1 + \frac{\sum_{i=1}^k r_i}{(n-r)k + \sum_{i=1}^k r_i(i-1)} \right]$$

又 $\sum_{i=1}^k r_i = r$, 所以

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{h} \ln \left[1 + \frac{r}{(n-r)k + \sum_{i=1}^k r_i(i-1)} \right] \quad (6.23)$$

即

$$\hat{\theta} = \frac{h}{\ln \left\{ 1 + r / \left[(n-r)k + \sum_{i=1}^k r_i(i-1) \right] \right\}} \quad (6.24)$$

如果只测试一次, 即 $k=1, h=t_i$, 则有

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{t_1} \ln \frac{n}{n-r} \quad (6.25)$$

例 6.6 从某批电子元件中,随机抽取 45 只产品进行非替换寿命试验,采用等时间间隔测试的方法,测试时间为 $t_0=0, t_1=200\text{ h}, t_2=400\text{ h}, t_3=600\text{ h}, t_4=800\text{ h}$,相应的失效个数如表 6.2 所列。

表 6.2 电子元件寿命试验数据

测试间隔/h	0~200	200~400	400~600	600~800	800~
失效个数	7	10	8	13	7

试验进行到 800 h 时停止。已知该元件寿命分布是单参数指数分布,试估计平均寿命。

解: $h=200\text{ h}, k=4, r_1=7, r_2=10, r_3=8, r_4=13, r_5=7$ 。

$$r = \sum_{i=1}^4 r_i = 7 + 10 + 8 + 13 = 38$$

平均寿命

$$\hat{\theta} = h / \ln \left[1 + \frac{r}{(n-r)k + \sum_{i=1}^k r_i (i-1)} \right] = 200\text{ h} / \ln \left[1 + \frac{38}{(45-38) \times 4 + (1-1) \times 7 + (2-1) \times 10 + (3-1) \times 8 + (4-1) \times 13} \right] = 583.8\text{ h}$$

6.1.2 两参数指数分布的极大似然估计

两参数指数分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-(t-\gamma)/\theta}, \quad t \geq \gamma \geq 0$$

其中, θ 为平均寿命, γ 为位置参数。

1. 无替换定数截尾试验

根据第 5.6.3 小节导出的无替换定数截尾子样的联合分布,写出其似然函数为

$$L(\theta, \gamma) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left[\frac{1}{\theta} e^{-(t_{(i)}-\gamma)/\theta} \right] \left[e^{-(t_{(r)}-\gamma)/\theta} \right]^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{1}{\theta} \right)^r e^{-\left[\sum_{i=1}^r (t_{(i)}-\gamma) + (n-r)(t_{(r)}-\gamma) \right] / \theta} \quad (6.26)$$

因为 $t_{(r)} \geq t_{(r-1)} \geq \dots \geq t_{(1)} \geq \gamma \geq 0$, 所以对于任何的 $\theta > 0$, 当 $\gamma = t_{(1)}$ 时, $L(\theta, \gamma)$ 将达到最大, 这时似然函数可写为

$$L(\theta, t_{(1)}) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\frac{1}{\theta} \right)^r e^{-\left[\sum_{i=1}^r (t_{(i)}-t_{(1)}) + (n-r)(t_{(r)}-t_{(1)}) \right] / \theta} \quad (6.27)$$

对上式取对数求导后,解对数似然方程得参数的极大似然估计

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=1}^r t_{(i)} - t_{(1)} \right] + (n-r)(t_{(r)} - t_{(1)}) \Big/ r \quad (6.28)$$

与

$$\hat{\gamma} = t_{(1)} \quad (6.29)$$

2. 有替换定数截尾试验

与前述单参数有替换定数截尾子样情况相同,似然函数可写成

$$L(\theta, \gamma) = \left(\frac{n}{\theta} \right)^r e^{-n(t_{(r)} - \gamma)/\theta}$$

对任何 $\theta > 0$, 当 $\gamma = t_{(1)}$ 时, 似然函数才能达到最大值, 于是

$$L(\theta, t_{(1)}) = \left(\frac{n}{\theta} \right)^r e^{-n(t_{(r)} - t_{(1)})/\theta}$$

对上式取对数并求导, 然后解似然方程, 得到参数的极大似然估计

$$\hat{\theta} = n(t_{(r)} - t_{(1)})/r \quad (6.30)$$

与

$$\hat{\gamma} = t_{(1)} \quad (6.31)$$

3. 无替换定时截尾试验

根据式(5.87), 可写出其似然函数为

$$L(\theta, \gamma) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left[\frac{1}{\theta} e^{-(t_{(i)} - \gamma)/\theta} \right] \left[e^{-(t_0 - \gamma)/\theta} \right]^{n-r} =$$

$$\frac{n!}{(n-r)! \theta^r} e^{-\left[\sum_{i=1}^r (t_{(i)} - \gamma) + (n-r)(t_0 - \gamma) \right] / \theta} \quad (6.32)$$

与前述类似, 得到 θ 和 γ 的极大似然估计分别为

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{i=1}^r (t_{(i)} - t_{(1)}) + (n-r)(t_0 - t_{(1)}) \right] / r \quad (6.33)$$

与

$$\hat{\gamma} = t_{(1)} \quad (6.34)$$

4. 有替换定时截尾试验

与前述相同, 写出两参数有替换定时截尾子样的似然函数为

$$L(\theta, \gamma) = \left(\frac{n}{\theta} \right)^r e^{-n(t_0 - \gamma)/\theta}$$

得到 θ 和 γ 的极大似然估计分别为

$$\hat{\theta} = n(t_0 - t_{(1)})/r \quad (6.35)$$

与

$$\hat{\gamma} = t_{(1)} \quad (6.36)$$

6.2 指数分布参数的区间估计

6.2.1 定数截尾试验子样的参数估计

设产品寿命服从指数分布,有密度函数

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}, \quad t \geq 0$$

现抽取 n 个样品进行定数截尾试验,得 r 个顺序统计量为 $0=t_{(0)} < t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$,为寻求 θ 的区间估计,找到与参数 θ 有关的枢轴量

$$H = \frac{2T}{\theta} \quad (6.37)$$

其中, T 为样品的总试验时间, $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)}$ 。由式(5.96)可知,枢轴量 $H = 2T/\theta$ 服从自由度 $2r$ 的 χ^2 分布。根据 χ^2 分布可写出

$$P\left[\chi_{\alpha/2}^2(2r) \leq \frac{2T}{\theta} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2r)\right] = 1 - \alpha$$

即

$$P\left[\frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)} \leq \theta \leq \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)}\right] = 1 - \alpha$$

由此,得 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的区间估计

$$\left. \begin{aligned} \theta_U &= \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \\ \theta_L &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

同理,可得 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单边置信下限和单边置信上限分别为

$$\left. \begin{aligned} \theta_L &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha}^2(2r)} \\ \theta_U &= \frac{2T}{\chi_{\alpha}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

相应的失效率 $1-\alpha$ 的区间估计是

$$\left. \begin{aligned} \lambda_U &= \frac{1}{\theta_L} = \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)}{2T} \\ \lambda_L &= \frac{1}{\theta_U} = \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2r)}{2T} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

根据 θ 的单边置信上、下限,相应地得到失效率的单边置信上、下限估计

$$\left. \begin{aligned} \lambda_U &= \frac{\chi_{1-\alpha}^2(2r)}{2T} \\ \lambda_L &= \frac{\chi_{\alpha}^2(2r)}{2T} \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

同样可求指数分布可靠度和可靠寿命的区间估计,对某给定时刻 t_0 的可靠度区间估计为

$$\left. \begin{aligned} R_L(t_0) &= e^{-t_0/\theta_L} = \exp\left[-\frac{t_0 \chi_{1-\alpha/2}^2(2r)}{2T}\right] \\ R_U(t_0) &= e^{-t_0/\theta_U} = \exp\left[-\frac{t_0 \chi_{\alpha/2}^2(2r)}{2T}\right] \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

对给定的可靠度 R ,可靠寿命在置信水平 $1-\alpha$ 下的区间估计为

$$\left. \begin{aligned} t_U(R) &= \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \ln \frac{1}{R} \\ t_L(R) &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)} \ln \frac{1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

对于有替换定数截尾子样,上述论证同样成立,只是总试验时间 $T=nt_{(r)}$ 。例如其平均寿命 θ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \theta_U &= \frac{2n t_{(r)}}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \\ \theta_L &= \frac{2n t_{(r)}}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

例 6.7 对飞机上装备的某种电子管进行有替换定数截尾试验。电子管总数 $n=39$,记录 9 次失效时间,如表 6.3 所列,求置信度为 90 % 的平均寿命的区间估计。

表 6.3 某电子管寿命试验数据

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
失效时间/h	423	1 090	2 386	3 029	3 652	3 925	8 967	10 957	11 358

解: 这是一个有替换定数截尾寿命试验,总试验时间为

$$T = n t_{(r)} = 39 \times 11\,358 \text{ h} = 442\,962 \text{ h}$$

由式(6.44)可知

$$\begin{aligned} \theta_L &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r)} = \frac{2 \times 442\,962 \text{ h}}{\chi_{0.95}^2(18)} = \frac{885\,924 \text{ h}}{28.9} = 30\,654.8 \text{ h} \\ \theta_U &= \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} = \frac{2 \times 442\,962 \text{ h}}{\chi_{0.05}^2(18)} = \frac{885\,924 \text{ h}}{9.39} = 94\,347.6 \text{ h} \end{aligned}$$

所以,电子管平均寿命的置信区间为 $[30\,654.8, 94\,347.6]$ 。

6.2.2 定时截尾试验子样的参数估计

对于无替换定时截尾试验,总试验时间 $T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_0$, 在 t_0 时间之前发生了 r 个失效,第 r 次失效发生的时间是 $t_{(r)}$,显然 $t_{(r)} \leq t_0$;第 $r+1$ 个失效发生时间为 $t_{(r+1)} > t_0$,则

$$T_r = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_{(r)} \leq T = \sum_{i=1}^r t_{(i)} + (n-r)t_0 < T_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} t_{(i)} + (n-r-1)t_{(r+1)}$$

于是 $2T_r \leq 2T < 2T_{r+1}$,其中 T_r 是发生 r 次失效的无替换定数截尾试验的总试验时间, T_{r+1} 是发生 $r+1$ 次失效的无替换定数截尾试验的总试验时间。显然,枢轴量 $2T_{r+1}/\theta$ 与 $2T_r/\theta$ 分别服从自由度为 $2r+2$ 和 $2r$ 的 χ^2 分布。因此

$$P\left[\frac{2T}{\theta} \geq \chi_{\alpha/2}^2(2r)\right] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left[\frac{2T_{r+1}}{\theta} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2r+2)\right] = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

所以 $P\left[\chi_{\alpha/2}^2(2r) \leq \frac{2T}{\theta} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2r+2)\right] \geq 1-\alpha$,由此得到在无替换定时截尾寿命试验下,平均寿命置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计为

$$\left. \begin{aligned} \theta_L &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r+2)} \\ \theta_U &= \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

对于有替换定时截尾试验,可利用泊松分布与 χ^2 分布的关系求置信区间,其结果与无替换定时截尾试验相同,具体可表示为

$$\left. \begin{aligned} \theta_L &= \frac{2n t_0}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r+2)} \\ \theta_U &= \frac{2n t_0}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

用总试验时间 $T=nt_0$ 表示,则有替换定时截尾试验的区间估计为

$$\left. \begin{aligned} \theta_L &= \frac{2T}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r+2)} \\ \theta_U &= \frac{2T}{\chi_{\alpha/2}^2(2r)} \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

进行单边估计时,其置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限为

$$\theta_L = \frac{2T}{\chi_{1-\alpha}^2(2r+2)} \quad (6.48)$$

同理,可得到失效率、可靠度、可靠寿命的区间估计及单边置信限。

例 6.8 某台电子计算机在总工作时间 1 556 h 中发生 4 次偶然故障,求该计算机的平均无故障工作时间 θ 及其在置信度为 90 % 时的置信区间。

解: 这是一有替换定时截尾试验。 $T=1\ 556\text{ h}, r=4$ 。

$$\hat{\theta} = \frac{T}{r} = \frac{1\ 556\text{ h}}{4} = 389\text{ h}$$

因为 $\chi^2_{1-\alpha/2}(2r+2) = \chi^2_{0.95}(10) = 18.3$ 与 $\chi^2_{\alpha/2}(2r) = \chi^2_{0.05}(8) = 2.73$, 所以

$$\theta_L = \frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r+2)} = \frac{2 \times 1\ 556\text{ h}}{18.3} = 170\text{ h}$$

$$\theta_U = \frac{2T}{\chi^2_{\alpha/2}(2r)} = \frac{2 \times 1\ 556\text{ h}}{2.73} = 1\ 140\text{ h}$$

故该计算机平均寿命在置信度为 90 % 时的置信区间为 $[170, 1\ 140]$ 。

6.2.3 定时间间隔测试试验子样的参数估计

对于定时间间隔测试试验子样的一种特殊情况即试验至某时刻 t 截止时测试一次,记失效数为 r ,投入试验的样品数为 n ,用二项分布来求其区间估计。

设每个样品在试验中失效的概率为 p ,那么 n 个样品投入试验发生 r 次失效的概率就是 $C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$,这是二项分布。当 n 较大时,二项分布可用均值为 np 、标准差为 $\sqrt{np(1-p)}$ 的正态分布近似,于是 $(r-np)/\sqrt{np(1-p)}$ 近似服从标准正态分布。若记 u_α 为标准正态分布 α 分位点,则 $(r-np)/\sqrt{np(1-p)}$ 取值在区间 $[u_{\alpha/2}, u_{1-\alpha/2}]$ 内的概率是 $1-\alpha$,即

$$P\left[u_{\alpha/2} \leq \frac{r-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_{1-\alpha/2}\right] =$$

$$P\left[np + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{np(1-p)} \leq r \leq np + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{np(1-p)}\right] =$$

$$1-\alpha$$

这里,若用失效频率 r/n 来近似 p ,则可得 r 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$\left. \begin{aligned} r_L &= r + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \\ r_U &= r + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \end{aligned} \right\}$$

将 r_L, r_U 代入式(6.25)中,即得平均寿命在置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \theta_U &= \frac{t}{\ln n - \ln \left[n - r + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \right]} \\ \theta_L &= \frac{t}{\ln n - \ln \left[n - r + u_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

而平均寿命置信度 $1-\alpha$ 的单边置信上限和下限分别为

$$\left. \begin{aligned} \theta_L &= \frac{t}{\ln n - \ln \left[n - r + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \right]} \\ \theta_U &= \frac{t}{\ln n - \ln \left[n - r + u_{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{r(n-r)}{n}} \right]} \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

同理可给出其失效率、可靠度、可靠寿命的区间估计和单边置信限。

6.2.4 两参数指数分布的区间估计

两参数指数分布的分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-(t-\gamma)/\theta}, \quad t \geq \gamma \geq 0$$

1. θ 的估计

对于无替换定数截尾试验,可参照单参数对 θ 估计的推导,同样设

$$Y_i = (n - i + 1)(t_{(i)} - t_{(i-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad t_0 = \gamma$$

由 5.6.4 小节可知, Y_i 相互独立且同分布,其密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta}$$

令 $T' = \sum_{i=2}^r Y_i$, 则枢轴量 $2T'/\theta$ 服从自由度为 $2(r-1)$ 的 χ^2 分布,由此可得到 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left. \begin{aligned} \theta_U &= \frac{2T'}{\chi_{\alpha/2}^2(2r-2)} \\ \theta_L &= \frac{2T'}{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r-2)} \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

相应的失效率 λ 的 $1-\alpha$ 区间估计为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_L &= \frac{\chi_{\alpha/2}^2(2r-2)}{2T'} \\ \lambda_U &= \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2(2r-2)}{2T'} \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

2. γ 的估计

根据 5.6.4 小节的知识,可推出 $2Y_i/\theta$ 是服从自由度为 2 的 χ^2 分布,因此

$$\frac{2n(t_{(1)} - \gamma)}{\theta} \sim \chi^2(2), \quad \frac{2T'}{\theta} \sim \chi^2(2r-2) \quad (6.53)$$

并相互独立,则

$$\frac{(r-1)n(t_{(1)} - \gamma)}{T'} \sim F(2, 2r-2) \quad (6.54)$$

简化后

$$\frac{n(t_{(1)} - \gamma)}{\hat{\theta}} \sim F(2, 2r - 2) \tag{6.55}$$

其中 $\hat{\theta}$ 由式(6.28)给出。于是根据

$$P\left[F_{\alpha/2}(2, 2r - 2) \leq \frac{n(t_{(1)} - \gamma)}{\hat{\theta}} \leq F_{1-\alpha/2}(2, 2r - 2)\right] = 1 - \alpha$$

得到 γ 的 $1-\alpha$ 置信区间

$$\left. \begin{aligned} \gamma_L &= t_{(1)} + \frac{\hat{\theta}}{n} F_{\frac{\alpha}{2}}(2, 2r - 2) \\ \gamma_U &= t_{(1)} + \frac{\hat{\theta}}{n} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2, 2r - 2) \end{aligned} \right\} \tag{6.56}$$

同理, γ 的 $1-\alpha$ 单侧置信上、下限分别为

$$\left. \begin{aligned} \gamma_L &= t_{(1)} - \frac{\hat{\theta}}{n} F_{1-\alpha}(2, 2r - 2) \\ \gamma_U &= t_{(1)} - \frac{\hat{\theta}}{n} F_{\alpha}(2, 2r - 2) \end{aligned} \right\} \tag{6.57}$$

对于有替换定数截尾试验, 关于 θ 和 γ 的区间估计与无替换定数截尾试验相同, 只是相应的 $\hat{\theta}$ 由式(6.30)给出。

习 题

- 6.1** 某元件寿命服从参数为 λ 的指数分布, 随机抽取 20 只元件进行定数截尾寿命试验, 至 10 只失效时停止, 结果为(单位:h): 20, 50, 640, 640, 750, 890, 970, 1 110, 1 660, 2 410。试求参数 λ 和平均寿命 θ 的极大似然估计及其置信度为 0.95 的区间估计。
- 6.2** 对 100 只开关管在 300 °C 条件下进行高温存储试验, 储存时间为 80 h。在此期间共有 74 只失效, 失效时间如题表 6.1 所列。

题表 6.1 失效时间统计

失效时间/h	1	3	6	13	22	41	73
失效数/只	5	4	14	23	11	13	4

假如这种开关管的寿命服从参数为 λ 的指数分布。试求这种开关管在 300 °C 下, 参数 λ 和平均寿命 θ 的极大似然估计。

- 6.3** 某种机载电子管的现场使用试验是有替换试验。飞机上共有此种电子管 39 只, 试验到

出现 9 只失效时停止。其失效时间(单位:h)为:423,1 090,2 386,3 029,3 652,3 925,8 967,10 957,11 358。假如此种电子管的寿命服从参数为 λ 的指数分布,试求参数 λ 和平均寿命 θ 的极大似然估计及其置信度为 0.90 的区间估计。

6.4 设收音机的寿命服从参数为 λ 的指数分布。抽其 80 台在规定条件下进行有替换试验。试求在 64 h 内失效数 r 分别为 1,2,3,4 和 5 时相应的平均寿命 θ 的极大似然估计。

6.5 设产品的寿命服从指数分布。对试验总时间为 6 080 h、发生 9 次失效的无替换定数截尾寿命试验,确定置信水平为 0.95 时,平均寿命 θ 的置信区间和单侧置信下限。

6.6 如果习题 6.5 中的试验是有替换的,其余保持不变,试确定置信水平为 0.9 时,平均寿命 θ 的置信区间和单侧置信下限。

第7章 威布尔分布的统计推断

威布尔分布是可靠性定量分析中常用的一类寿命分布。本章介绍威布尔分布参数的点估计与区间估计,在此基础上可对服从威布尔分布的产品进行可靠性数据分析。

7.1 参数的点估计

7.1.1 参数的极大似然估计

以定数截尾试验情形下两参数威布尔分布 $W(m, \eta)$ 为例来介绍参数的极大似然估计。两参数威布尔分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} (t/\eta)^{m-1} e^{-(t/\eta)^m}, \quad t \geq 0, \quad m, \eta > 0$$

假设投入 n 个样品进行试验,至 r 个失效时停止,观测到失效时间的顺序统计量为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$ 。其似然函数可写为

$$L(m, \eta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \frac{m}{\eta} \left(\frac{t_{(i)}}{\eta} \right)^{m-1} e^{-t_{(i)}/\eta^m} \times [e^{-t_{(r)}/\eta^m}]^{n-r} \quad (7.1)$$

对上式取对数并求导,得到如下似然方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial m} &= \sum_{i=1}^r \left[\frac{1}{m} + \ln t_{(i)} - \ln \eta - \left(\frac{t_{(i)}}{\eta} \right)^m \ln \frac{t_{(i)}}{\eta} \right] - (n-r) \left(\frac{t_{(r)}}{\eta} \right)^m \ln \left(\frac{t_{(r)}}{\eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \eta} &= -\frac{mr}{\eta} + \frac{m}{\eta} \sum_{i=1}^r \left(\frac{t_{(i)}}{\eta} \right)^m + (n-r) \left(\frac{t_{(r)}}{\eta} \right)^m \frac{m}{\eta} = 0 \end{aligned} \right\}$$

经整理化简后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^r t_{(i)}^m \ln t_{(i)} + (n-r)t_{(r)}^m \ln t_{(r)}}{\sum_{i=1}^r t_{(i)}^m + (n-r)t_{(r)}^m} - \frac{1}{m} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_{(i)} &= 0 \\ \eta^m &= \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r t_{(i)}^m + (n-r)t_{(r)}^m \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

这是两个超越方程,需用数值方法迭代求解,建议使用二分法计算。

对于定时截尾试验与随机截尾试验以及三参数威布尔分布,可使用类似方法得到其参数的极大似然估计。

7.1.2 定数截尾试验下参数的线性估计

1. 基于最优线性无偏估计的点估计

设产品寿命 T 服从威布尔分布,其分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}, \quad t > 0, \quad m, \eta > 0$$

由于直接求 η, m 的估计比较困难,因此考察寿命 T 的对数,即 $X = \ln T$,易知 X 服从极值分布,其分布函数为

$$F_X(x) = 1 - e^{-e^{(x-\mu)/\sigma}} \quad (7.3)$$

其中

$$\sigma = 1/m, \quad \mu = \ln \eta \quad (7.4)$$

先计算参数 μ 和 σ 的最优线性无偏估计,然后通过式(7.4)得到 η, m 的估计。

进一步作变换

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (7.5)$$

易知 Y 服从标准极值分布

$$F_Y(y) = 1 - e^{-e^y}, \quad -\infty < y < \infty$$

在产品寿命服从威布尔分布的母体中,抽取 n 个样品进行试验,至 r 个样品失效停止,观测的顺序统计量为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$ 。由于对数函数的单调性,设 $x_{(i)} = \ln t_{(i)}$,则 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)}$ 可以看作是来自极值分布的一个容量为 n 的样本的前 r 个顺序统计量。由于线性变换式(7.5)的单调性,若设 $y_{(i)} = \frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}$,则 $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq \cdots \leq y_{(r)}$ 可以看作是来自标准极值分布的容量为 n 的样本的前 r 个顺序统计量。显然, $E(Y_{(i)})$ 和 $\text{cov}(Y_{(i)}, Y_{(j)}), i, j = 1, 2, \cdots, r$ 只与 n, r 有关,而不依赖于其他参数。容易写出 μ 和 σ 的最优线性无偏估计为

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^r D(n, r, j) x_{(j)} \quad \text{与} \quad \hat{\sigma} = \sum_{j=1}^r C(n, r, j) x_{(j)} \quad (7.6)$$

其中, $C(n, r, j)$ 称为 σ 的最优线性无偏估计系数, $D(n, r, j)$ 称为 μ 的最优线性无偏估计系数,具体可查附表 B.1 或参考文献[1]的表 1。 $\text{var}(\hat{\mu}) = A_{r,n} \sigma^2, \text{var}(\hat{\sigma}) = l_{r,n} \sigma^2, \text{cov}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = B_{r,n} \sigma^2$ 。

由 $\sigma = 1/m$, 可得 m 的估计为

$$\hat{m}' = \frac{1}{\hat{\sigma}} \quad (7.7)$$

由于 \hat{m}' 是 m 的有偏估计,经过修偏,可得 m 的近似无偏估计

$$\hat{m} = \frac{g_{r,n}}{\hat{\sigma}} \quad (7.8)$$

其中, $g_{r,n} = 1 - l_{r,n}$ 为修偏系数, $A_{r,n}, B_{r,n}, l_{r,n}$ 与 $g_{r,n}$ 可查附表 B.1 或参考文献[1]的表 1。而

$$\hat{\eta} = e^{\hat{\mu}} \tag{7.9}$$

例 7.1 某种机电产品的寿命服从威布尔分布, 现从一批产品中随机抽取 12 个样品, 在一定应力下进行寿命试验, 至有 8 个样品失效时试验停止, 每个样品的失效时间列于表 7.1。试用最优线性无偏估计求分布参数 m 和 η 的估计值。

解: 由 $n=12, r=8$, 查附表 B.1 得 $C(12,8,j)$ 和 $D(12,8,j)$ 并填入表 7.1 第 4 列和第 6 列。

由式(7.6)得

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2.302\ 6 \sum_{j=1}^8 C(12,8,j)x_{(j)} = 2.302\ 6 \times 1.197\ 4 = 2.757 \\ \hat{\mu} &= 2.302\ 6 \sum_{j=1}^8 D(12,8,j)x_{(j)} = 2.302\ 6 \times 3.057 = 7.039 \end{aligned}$$

再由式(7.8)和式(7.9)得

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{g_{r,n}}{\hat{\sigma}} = \frac{0.885\ 1}{2.757\ 1} = 0.321 \\ \hat{\eta} &= e^{\hat{\mu}} = e^{7.039} = 1\ 140.3 \end{aligned}$$

表 7.1 某机电产品寿命分布参数最优线性无偏估计相关系数表

序 号	$t_{(j)}$	$x_{(j)} = \lg t_{(j)}$	$C(n,r,j)$	$C(n,r,j) \cdot x_{(j)}$	$D(n,r,j)$	$D(n,r,j) \cdot x_{(j)}$
1	2.5	0.397 9	-0.121 6	-0.048 4	-0.029 3	-0.011 7
2	7.5	0.875 1	-0.125 1	-0.109 5	-0.019 0	-0.016 6
3	17.5	1.243	-0.120 0	-0.149 2	-0.004 9	-0.006 1
4	44	1.643 5	-0.108 5	-0.173 8	0.012 5	0.020 5
5	63	1.799 3	-0.090 7	-0.163 2	0.033 2	0.059 7
6	83	1.919 1	-0.066 1	-0.126 9	0.057 9	0.111 1
7	425	2.628 4	-0.033 3	-0.087 5	0.087 5	0.230 0
8	1250	3.096 9	0.665 3	2.060 4	0.862 2	2.670 1
Σ				1.1974		3.057

2. 基于最优线性不变估计的点估计

从威布尔总体中随机抽取容量为 n 的样本, 至 r 个失效时停止试验, 得顺序统计量为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$, 因此 $\ln t_{(1)} \leq \ln t_{(2)} \leq \cdots \leq \ln t_{(r)}$, 可得到 μ 和 σ 的最优线性不变估计(BLIE)

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^r D_I(n,r,j) \ln t_{(j)} \quad \text{与} \quad \hat{\sigma} = \sum_{j=1}^r C_I(n,r,j) \ln t_{(j)} \tag{7.10}$$

其中, $C_I(n,r,j)$ 称为 σ 的最优线性不变估计系数, $D_I(n,r,j)$ 称为 μ 的最优线性不变估计系

数,并且

$$C_I(n,r,j) = \frac{1}{1+l_{r,n}}C(n,r,j) \quad \text{与} \quad D_I(n,r,j) = D(n,r,j) - \frac{B_{r,n}}{1+l_{r,n}}C(n,r,j) \tag{7.11}$$

由此得 m 和 η 的估计为

$$\left. \begin{aligned} \hat{m} &= \frac{1}{\hat{\sigma}} \\ \hat{\eta} &= e^{\hat{\mu}} \end{aligned} \right\} \tag{7.12}$$

m 的近似无偏估计为

$$\hat{m}' = \frac{1-l_{r,n}}{(1+l_{r,n})\hat{\sigma}} \tag{7.13}$$

例 7.2 为了解一批钽电容在 85 ℃、工作电压为 19.2 V 下的可靠性特性,现从这批产品中随机抽取 12 只作定数截尾寿命试验,试验结果列于表 7.2,设该钽电容寿命分布为两参数威布尔分布,试估计其参数。

解: 查附表 B.1 得 $C_I(n,r,j)$ 和 $D_I(n,r,j)$,填入表 7.2 中。

表 7.2 钽电容寿命分布参数最优无偏估计的相关系数表

序号	$t_{(j)}$	$\lg t_{(j)}$	$C_I(n,r,j)$	$D_I(n,r,j)$
1	350	2.544 1	-0.128 3	-0.053
2	1 200	3.079 2	-0.130 3	-0.040 9
3	2 600	3.415 0	-0.123 0	-0.023 1
4	3 050	3.484 3	-0.108 7	-0.000 5
5	3 515	3.545 9	-0.087 7	0.026 9
6	4 018	3.604 0	-0.059 3	0.059 9
7	6 020	3.779 6	0.637 3	1.030 6

由式(7.12),得

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 2.302\ 6 \sum_{j=1}^7 C_I(n,r,j) \lg t_{(j)} = 0.823\ 6 \\ \hat{\mu} &= 2.302\ 6 \sum_{j=1}^7 D_I(n,r,j) \lg t_{(j)} = 8.909\ 0 \\ \hat{m} &= \frac{1}{\hat{\sigma}} = 1.214\ 2 \end{aligned}$$

查附表 B.1 得 $l_{r,n}=l_{7,12}=0.139\ 0$,由式(7.13)得 m 的近似无偏估计

$$\hat{m}' = \frac{1-l_{r,n}}{(1+l_{r,n})} \cdot \hat{m} = \frac{0.861\ 0}{1.139\ 0} \times 1.214\ 2 = 0.917\ 9$$

$$\hat{\eta} = e^{\hat{\mu}} = e^{8.9090} = 7\,328.18$$

3. 基于简单线性无偏估计的点估计

现在从一批产品中随机抽取 n 个样品进行定数截尾寿命试验, 其中 r 个失效, 失效数据按从小到大排列得到顺序统计量 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$, 作对数变换 $x_{(i)} = \ln t_{(i)}$, 相应地有 $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(r)}$, 它们是极值分布的前 r 个顺序统计量。因此得到 μ, σ 的简单线性无偏估计 (GLUE)

$$\hat{\sigma}_s = \left[(2s - r - 1)x_{(s)} - \sum_{i=1}^{s-1} x_{(i)} + \sum_{i=s}^r x_{(i)} \right] / (nk_{s,r,n}) \quad (7.14)$$

$$\hat{\mu}_s = x_{(s)} - \hat{\sigma}_s E(Z_{(s)}) \quad (7.15)$$

其中, $E(Z_{(s)})$ 为标准极值分布第 s 个顺序统计量的数学期望。 $k_{s,r,n}$ 称为无偏估计系数, 它依赖于样本量 n 、失效数 r 和 s ($2 \leq s \leq r$) 三个参数。特别当 $r \leq 0.9n$ 时, 上述两式可改写为

$$\hat{\sigma}_s = \sum_{i=1}^r (x_{(r)} - x_{(i)}) / nk_{r,n} = \frac{(r-1)x_{(r)} - \sum_{i=1}^{r-1} x_{(i)}}{nk_{r,n}} \quad (7.16)$$

$$\hat{\mu}_s = x_{(r)} - \hat{\sigma}_s E(Z_{(r)}) \quad (7.17)$$

与 7.1.2 小节类似, 得到 m 的近似无偏估计

$$\hat{m}_s = \frac{g_{r,n}}{\hat{\sigma}_s} \quad (7.18)$$

其中, $g_{r,n} = 1 - l_{r,n}$ 为修偏系数, 系数 $nk_{r,n}$, $l_{r,n}$ 和 $g_{r,n}$ 可查附表 B.2 或参考文献[1]的表 2。

η 的估计为

$$\hat{\eta}_s = e^{\hat{\mu}_s} \quad (7.19)$$

例 7.3 某机电产品寿命服从威布尔分布, 现从一批产品中抽取 30 个样品, 在一定应力下进行寿命试验, 到有 10 个样品失效时试验停止, 每个失效时间列于表 7.3。用 GLUE 求 m 和 η 的估计值。

表 7.3 某机电产品寿命试验数据

序 号	失效时间 $t_{(i)}/h$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$	序 号	失效时间 $t_{(i)}/h$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$
1	17.5	2.862 201	6	1 166	7.061 334
2	66	4.189 655	7	1 333	7.195 187
3	83	4.418 841	8	1 667	7.418 781
4	125	4.828 314	9	1 833	7.513 709
5	375	5.926 926	10	2 625	7.872 836

解: 由于 $r \leq 0.9n, r=10, s=10, x_{(s)} = x_{(r)} = 7.872\ 836$, 由式(7.16)得

$$\hat{\sigma}_s = \frac{rx_{(r)} - \sum_{i=1}^{r-1} x_{(i)}}{n k_{r,n}} = \frac{10 \times 7.872\ 836 - 51.414\ 947\ 81}{9.912\ 8} = 2.755\ 4$$

查附表 B.2, 得 $n k_{r,n} = 9.912\ 8$ 与 $E(Z_{(r)}) = -0.974\ 6$, 因此

$$\hat{\mu}_s = x_{(r)} - E(Z_{(r)})\hat{\sigma}_s = 7.872\ 836 - (-0.974\ 6) \times 2.755\ 4 = 10.558\ 2$$

再由式(7.18)和式(7.19)得

$$\hat{m} = g_{r,n}/\hat{\sigma}_s = \frac{0.899\ 2}{2.755\ 4} = 0.326\ 3$$

$$\hat{\eta} = e^{\hat{\mu}_s} = e^{10.558\ 2} = 38\ 491.78$$

4. 基于简单线性不变估计的点估计

根据简单线性无偏估计与简单线性不变估计的关系, 得到 σ, μ 的简单线性不变估计

$$\hat{\sigma}_I = \frac{\hat{\sigma}_s}{1 + l_{r,n}} \quad \text{与} \quad \hat{\mu}_I = \hat{\mu}_s - \frac{B_{r,n}}{1 + l_{r,n}} \hat{\sigma}_s \quad (7.20)$$

其中, $\hat{\sigma}_s, \hat{\mu}_s$ 指 σ, μ 的简单线性无偏估计。

m 的近似无偏估计为

$$\hat{m}_I = \frac{g_{r,n}}{\hat{\sigma}_I} = \frac{1 - l_{r,n}}{\hat{\sigma}_I} \quad (7.21)$$

η 的估计为

$$\hat{\eta}_I = e^{\hat{\mu}_I} \quad (7.22)$$

例 7.4 某产品服从两参数威布尔分布, 用 60 个产品作寿命试验, 得到前 6 个失效产品的失效时间(单位:h)为 4.45, 5.87, 7.15, 8.29, 9.26, 11.04, 试估计威布尔分布参数。

解: 首先计算 σ, μ 的简单线性无偏估计:

$$\hat{\sigma}_s = \frac{(r-1)\ln t_{(r)} - \sum_{i=1}^r \ln t_{(i)}}{n k_{r,n}} = 0.475$$

$$\hat{\mu}_s = \ln t_{(6)} - E(Z_{(6)})\hat{\sigma}_s = 3.51$$

再计算 σ, μ 的简单线性不变估计

$$\hat{\sigma}_I = \frac{\hat{\sigma}_s}{1 + l_{r,n}} = \frac{0.475}{1 + 0.194\ 9} = 0.397$$

$$\hat{\mu}_I = \hat{\mu}_s - \frac{B_{r,n}}{1 + l_{r,n}} \hat{\sigma}_s = 3.51 - \frac{27.682\ 0/60}{1 + 0.194\ 9} \times 0.397 = 3.357$$

最后计算 m 的近似无偏估计 \hat{m}_I 和 η 的估计 $\hat{\eta}_I$ 为

$$\hat{m}_I = \frac{1 - l_{r,m}}{\hat{\sigma}_I} = \frac{1 - 0.1949}{0.397} = 2.0280$$

$$\hat{\eta}_I = e^{\hat{\mu}_I} = e^{3.357} = 28.695$$

7.1.3 参数的最小二乘估计

两参数威布尔分布的分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-t^m/t_0}, \quad m > 0, \quad t_0 > 0, \quad t \geq 0$$

所以 $\frac{1}{1-F(t)} = e^{t^m/t_0}$, 两边取两次对数, 得 $\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = m \ln t - \ln t_0$, 令 $y = \ln \ln \frac{1}{1-F(t)}$, $x = \ln t$, $b_0 = -\ln t_0$, 于是得到回归方程 $y = b_0 + b_1 x$ 。

根据观测数据 $\left\{ \ln t_i, \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}; i=1, 2, \dots, n \right\}$, 用最小二乘法得到回归系数 b_0, b_1 和相关系数 r 。由此得到参数估计为

$$\left. \begin{aligned} \hat{m} &= b_1 \\ \hat{t}_0 &= e^{-b_0} \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

例 7.5 从某种绝缘液体中, 随机地抽取 $n=19$ 个样品, 在过载负荷 $V=34$ kV 条件下进行寿命试验, 其失效时间(单位:h)列入表 7.4。试用最小二乘法估计分布参数。

表 7.4 最小二乘估计相关变量的计算

序 号	t_i/h	$F(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}$	序 号	t_i/h	$F(t_i)$	$\ln t_i$	$\ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}$
1	0.19	0.026	-1.6607	-3.6365	11	7.35	0.553	1.9947	-0.2167
2	0.78	0.079	-0.2485	-2.4974	12	8.01	0.605	2.0807	-0.07379
3	0.96	0.132	-0.04082	-1.955	13	8.27	0.658	2.1126	0.07041
4	1.31	0.184	0.2700	-1.5929	14	12	0.711	2.4849	0.2162
5	2.78	0.237	1.02245	-1.3075	15	13.95	0.763	2.6355	0.3644
6	3.16	0.289	1.1506	-1.0756	16	16	0.816	2.7726	0.5264
7	4.15	0.342	1.4231	-0.871	17	21.21	0.868	3.0545	0.7055
8	4.67	0.395	1.5412	-0.6881	18	27.11	0.921	3.2999	0.9315
9	4.85	0.447	1.5709	-0.5236	19	34.95	0.974	3.5539	1.2946
10	6.5	0.50	1.8718	-0.3665					

解：对表 7.4 中的数据 $\left\{ x_i = \ln t_i, y_i = \ln \ln \frac{1}{1-F(t_i)}; i=1, 2, \dots, n \right\}$ 进行线性回归, 得到

$$b_0 = -2.0778, \quad b_1 = 0.93155, \quad r = 0.9959$$

因此

$$\hat{m} = b_1 = 0.93155$$

$$\hat{t}_0 = e^{-b_0} = e^{2.0778} = 7.987$$

$$\hat{\eta} = \hat{t}_0^{\frac{1}{\hat{m}}} = 7.987^{\frac{1}{0.93155}} = 9.304$$

7.1.4 威布尔分布的图估计

在位置参数 $\gamma=0$ 时, 威布尔分布的分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-t^m/t_0}$$

因此

$$1/[1-F(t)] = e^{t^m/t_0}$$

对上式取两次对数, 得

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} = m \ln t - \ln t_0 \quad (7.24)$$

令 $y = \ln \ln \frac{1}{1-F(t)}, x = \ln t, b = -\ln t_0$, 则式(7.24)可写成

$$y = mx + b$$

因此在 $x-y$ 直角坐标系中, $y=mx+b$ 是一条斜率为 m 、截距为 b 的直线。

在上述变换中, 存在着下列关系

$$\left. \begin{aligned} x &= \ln t \\ t &= e^x \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

和

$$\left. \begin{aligned} y &= \ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \\ F(t) &= 1 - e^{-e^y} \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

现在, 来制作威布尔概率纸。先取 $x-y$ 坐标系, 它们是普通的等刻度直角坐标系。由式(7.25)和式(7.26), 在 x 轴上把和 x 对应的 t 刻在 x 的旁边; 在 y 轴上把和 y 对应的 $F(t)$ 刻在 y 的旁边。于是除 $x-y$ 坐标系外, 还有一个对应的 $t-F(t)$ 坐标系, 这是一张特殊的坐标纸, 如图 7.1 所示。

为便于使用, 刻度没有标在 x, y 轴上, 而在坐标纸的四条边上标出, 即将图 7.1 的四把刻度尺分别移到上、下、左、右四边, 将上边的刻度尺称为 x 尺, 下边的称为 t 尺, 左边的称为 $F(t)$

尺,右边的称为 y 尺,它们之间的关系满足式(7.25)和式(7.26)。如图 7.2 所示,这就是威布尔概率纸。

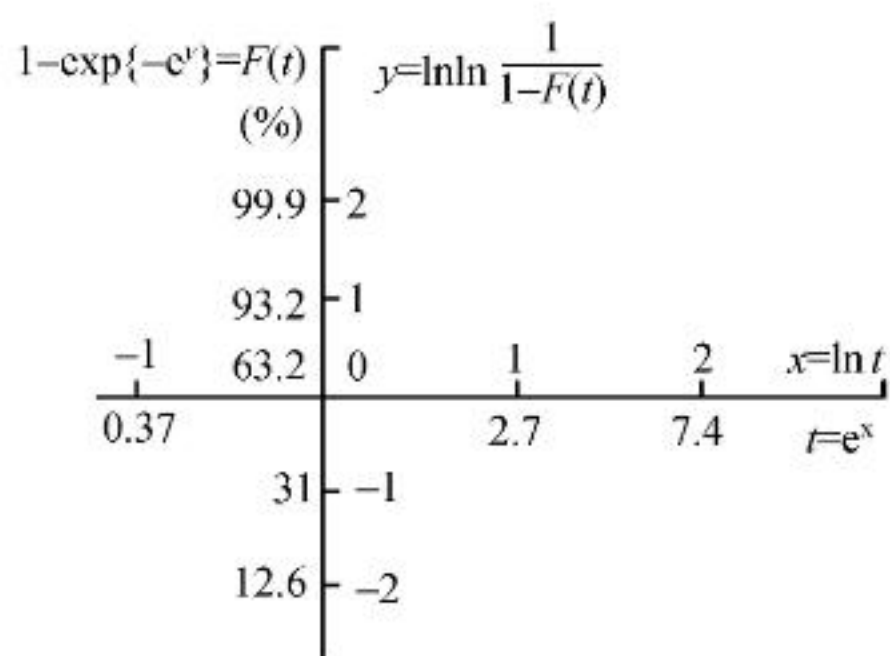


图 7.1 威布尔概率纸的坐标变换

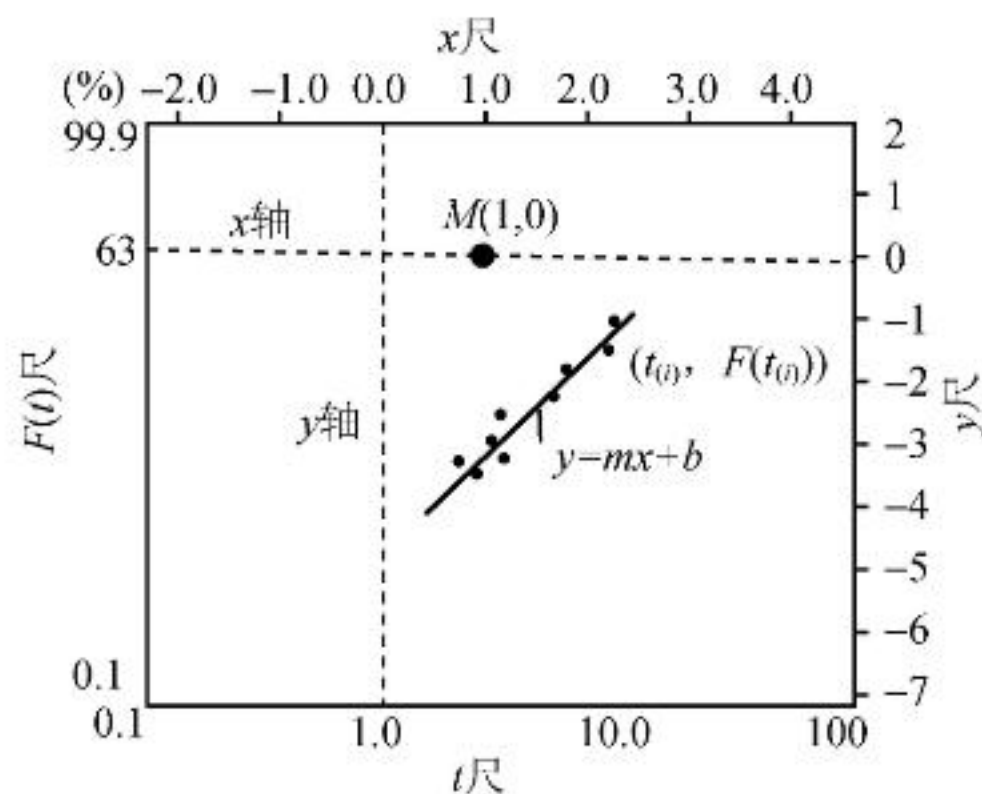


图 7.2 威布尔概率纸的构成

以数据 $(t_{(i)}, F(t_{(i)}))$ 在概率纸上描点,如果产品寿命服从威布尔分布并且 $\gamma=0$,那么这些点就会大致排列在一条直线的附近,因而可根据这些数据点配成一条直线,目测配置直线时,应注意直线两侧的点数大致相同。

1. 参数的图估计

(1) 形状参数 m 的估计

在威布尔概率纸上有一个 $x=1, y=0$ 的点,图上画有一小圈,此点称为 m 的估计点,简称 M 点。过 M 点作直线 $y=mx+b$ 的平行线,该平行线的方程为

$$y = m(x - 1) \quad (7.27)$$

由式(7.27)可知:当 $x=0$ 时, $y=-m$ 。因此,该平行线与 y 轴交点读数的绝对值就是形状参数 m 的估计值。

具体做法如下:过点 $M(1,0)$ 作所配直线的平行线与 y 轴相交,过交点右引水平线和 y 尺相交,交点刻度的绝对值就是形状参数 m 的估计值 \hat{m} ,如图 7.3 所示。

另外,也可在所配直线上任取两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) ,由

$$\hat{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7.28)$$

计算 m 的估计值。所选两点要适当隔开一些,使 $x_2 - x_1$ 是一个整数,便于计算。

(2) 真尺度参数 η 的估计

设直线 $y=mx+b$ 和 x 轴的交点为 $(a,0)$,代入直线方程有

$$0 = ma + b$$

从而 $ma = -b$, 又 $b = -\ln t_0$, 所以

$$t_0 = e^{-b} = e^{ma} \quad (7.29)$$

因为 $\eta = t_0^{1/m}$, 所以 $\eta = e^a$, 并注意到 t 尺与 x 尺有一一对应关系, 所以与 x 轴上点 a 相对应的 t 轴上的刻度就是真尺度参数 η 的估计值。

具体做法: 从所配直线和 x 轴的交点下引垂线和 t 轴相交, 垂足的刻度就是真尺度参数 η 的估计值 $\hat{\eta}$, 如图 7.4 所示。

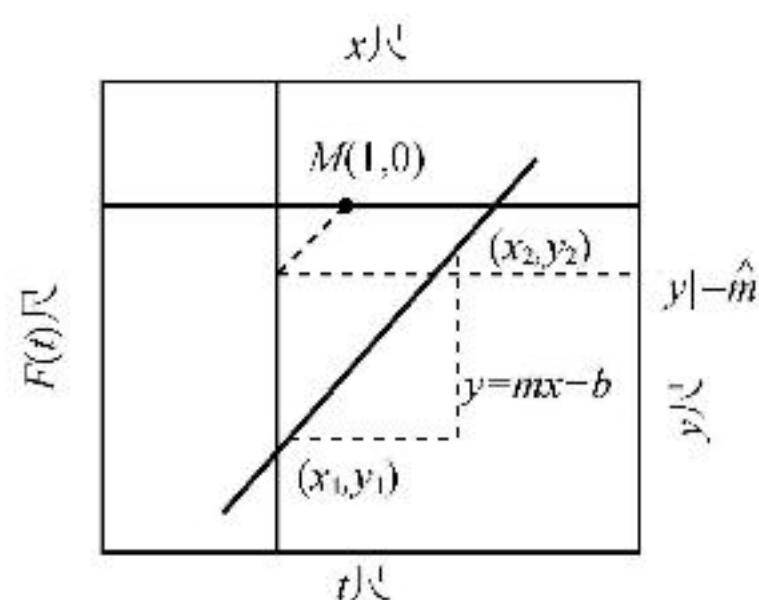


图 7.3 形状参数 m 的估计

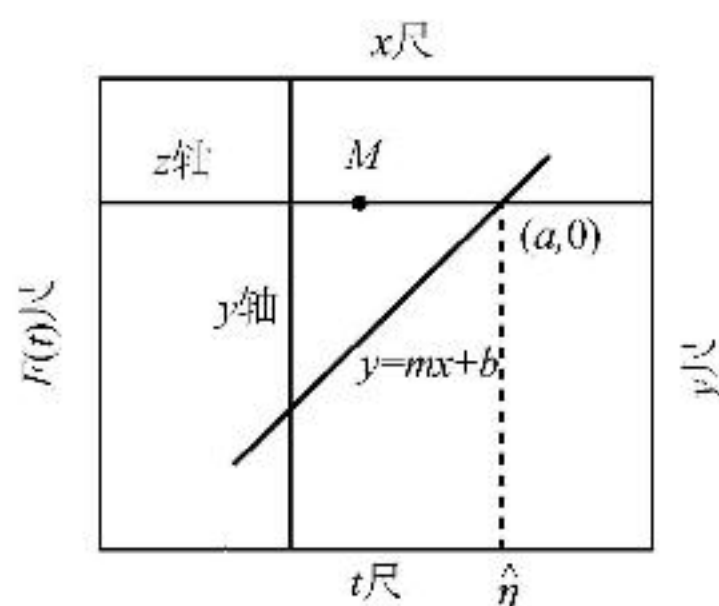


图 7.4 特征寿命 η 的估计

(3) 尺度参数 t_0 的估计

由所配直线与 y 轴交于点 $(0, b)$, 又

$$t_0 = e^{-b} \quad (7.30)$$

又由于 t 尺和 x 尺的一一对应关系, 即 $t = e^x$, 因此将所配直线与 y 轴交点在 y 尺上的读数移到 x 尺上, 并求出对应到 t 尺上的读数, 此读数即为尺度参数 t_0 的估计值。

具体做法: 由所配直线与 y 轴的交点右引水平线与 y 尺相交, 交点的刻度即为 b , 在 x 尺上找到刻度为 $-b$ 的点, 从这点下引垂线, 和 t 尺相交, 垂足的刻度即为尺度参数 t_0 的估计值 \hat{t}_0 , 如图 7.5 所示。

另外, t_0 也可由式(7.29)和式(7.30)计算得到, 式(7.29)中的 m 用估计值 \hat{m} 代入。当先估计到 η 时, 也可用 $\hat{\eta}$ 来计算 \hat{t}_0 , 即 $\hat{t}_0 = \hat{\eta}^{\hat{m}}$ 。

(4) 位置参数 γ 的估计

威布尔概率纸是在 $\gamma = 0$ 的情况下构造出来的。当试验数据符合 $\gamma = 0$ 的威布尔分布时, 由观测数据所作的线应近似为一条直线。但当 $\gamma \neq 0$ 时, 则描出的并不是一条直线。当 $\gamma > 0$ 时, 所作的线稍向下弯, 呈凸形; 当 $\gamma < 0$ 时, 所作的线稍向上弯, 呈凹形, 如图 7.6 所示。

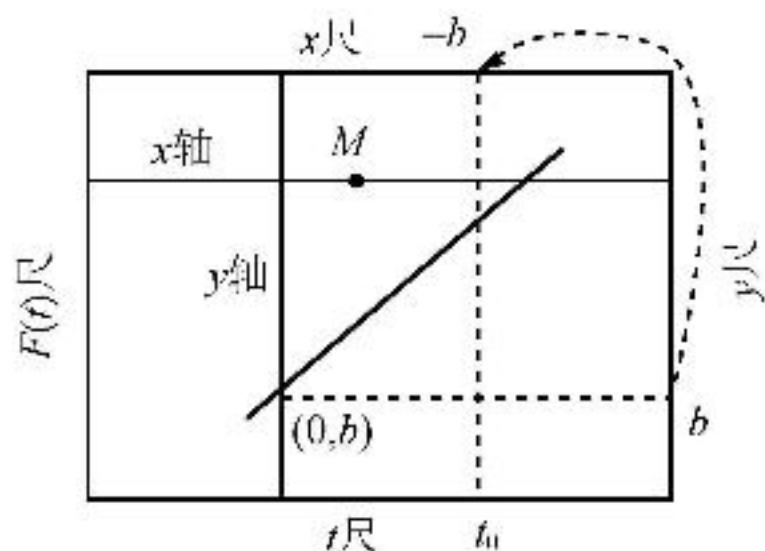


图 7.5 尺度参数 t_0 的估计

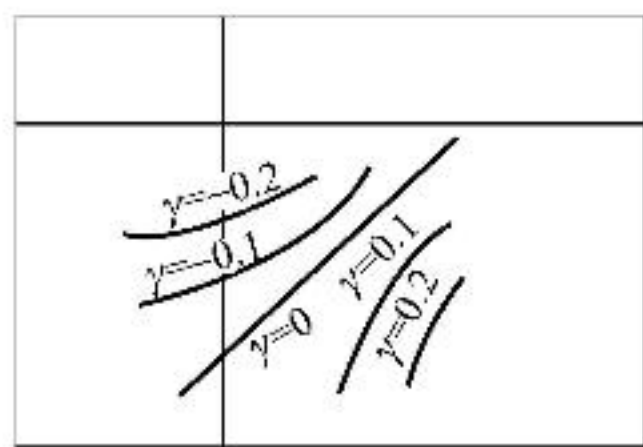


图 7.6 $\gamma \neq 0$ 的试验数据
在威布尔概率纸上所配之线的变化

由威布尔分布函数 $F(t) = 1 - e^{-(t-\gamma)^m/t_0}$ 可知, 对 t 轴进行平移后, 即令 $t' = t - \gamma$, 可得一个新的威布尔分布函数

$$F_1(t') = 1 - e^{-(t')^m/t_0} = 1 - e^{-[(t-\gamma)^m/t_0]} = F(t)$$

这就是说, $\gamma \neq 0$ 时威布尔分布函数 $F(t)$ 可以经过平移转换为 $\gamma = 0$ 的威布尔分布 $F_1(t')$, 使其分布由曲线变换成一条直线, 如图 7.7 所示。这种做法叫直线化, 下面叙述其具体做法。

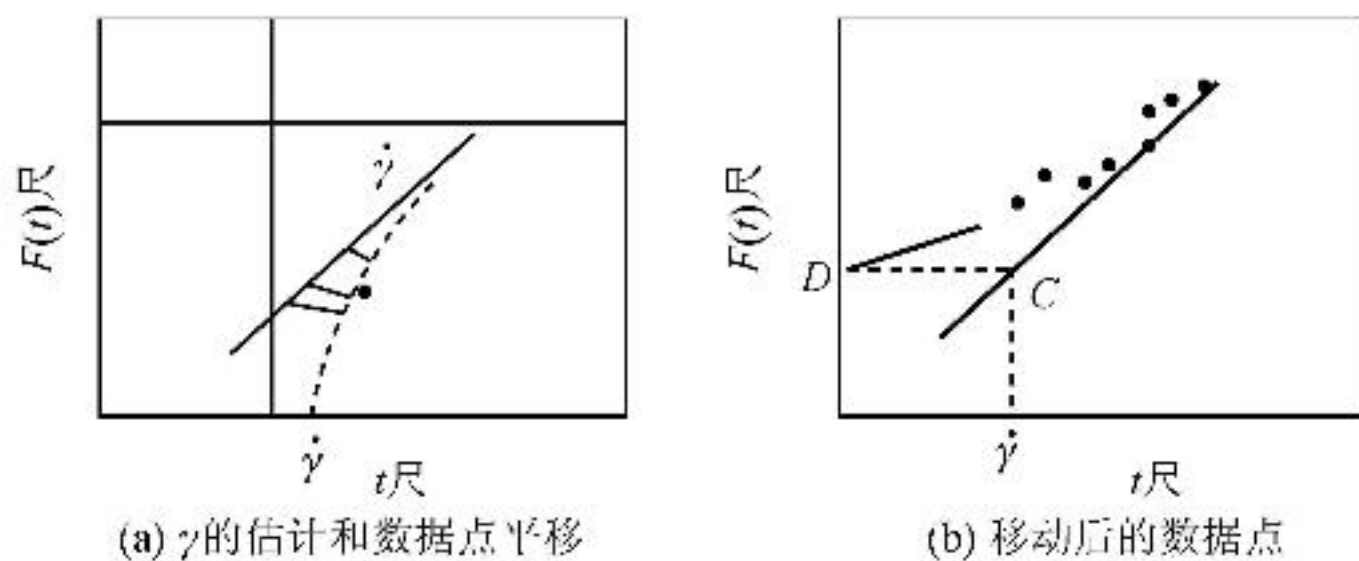


图 7.7 位置参数 γ 的估计

当 $\gamma > 0$ 时, 沿所配置的曲线顺势延长到和 t 尺相交, 交点的刻度就是 γ 的初始估计值。因为当 $t = \gamma$ 时, 有

$$F(\gamma) = 1 - e^{-(\gamma-\gamma)^m/t_0} = 0$$

而威布尔概率纸的底边 $F(t) = 0.001$, 所以用曲线和 t 尺的交点作为 γ 的初始估计值是可行的。有了 $\hat{\gamma}$ 值后, 在所描的数据点中, 按 $F(t)$ 由小到大的顺序适当地选 3~5 个点, 左移 $\hat{\gamma}$, 看移动后的各点是否大致在一条直线上; 若仍不在一条直线上, 修改 $\hat{\gamma}$ 后再试, 直到所得数据点呈现为一条直线时为止。这时 γ 的估计值最终确定, 将所描的各点全部左移 $\hat{\gamma}$, 即 $t'_i = t_i - \hat{\gamma}$ 。然后, 由移动后的点所得到的直线, 按前述方法估计 m 和 t_0 的值。图 7.7(a) 给出了 γ 的估计和数据点平移的情况。

当 $\gamma < 0$ 时, 意味着分布曲线是在 $t = 0$ 以前就开始了, 因此需要将 t 尺进行变换, 即

$$t' = t + \hat{\gamma}$$

并将所描曲线上的数据点向右移以实现直线化。在数据点的上端,以切线方向作直线,然后沿着数据点的弯曲方向向左引曲线与 $F(t)$ 尺相交,得一交点 D ,从该交点右引水平线与切线相交于点 C ,再由交点 C 引垂线与 t 尺相交,得到的刻度值可作为 γ 的初始估计值 $\hat{\gamma}$,如前述的做法重复几次,直到移动后的数据点近似呈一条直线为止,如图 7.7(b)所示。

另外,也可用下述方法求 $\hat{\gamma}$:过故障时间的最大与最小的两个极点作两条水平线,在这两条水平线的等距离处作第三条水平线,从三条水平线与曲线的交点处作 t 尺的垂线,在 t 尺上读出 t_1, t_2 和 t_3 的值,如图 7.8 所示。然后根据下式计算 $\hat{\gamma}$,即

$$\hat{\gamma} = t_2 - \frac{(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)}{(t_3 - t_2) - (t_2 - t_1)} \tag{7.31}$$

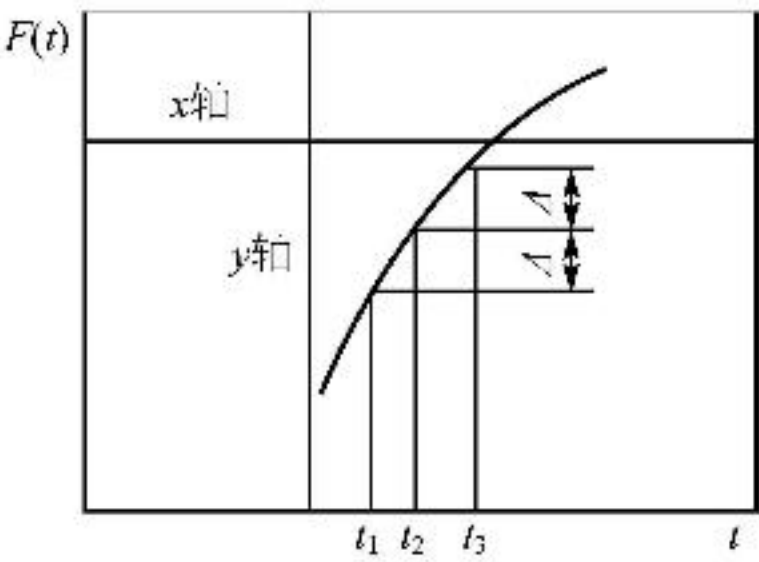


图 7.8 位置参数 γ 估计时水平线的作法

例 7.6 从某种绝缘液体中,随机抽取 $n=19$ 个样品,在过负荷 34 kV 条件下进行试验,其故障时间列入表 7.5 中。已知其寿命服从威布尔分布,试用概率纸求其分布函数的参数。

解: 将故障时间按升序排列于表 7.5 的第二、五行,然后用近似中位秩公式计算 $F_n(t_{(i)})$,结果列于第三、六行。

表 7.5 试验样品的经验分布函数的计算

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
故障时间 $t_{(i)}/\text{h}$	0.19	0.78	0.96	1.31	2.78	3.16	4.15	4.67	4.85	6.5
$F_n(t_{(i)})/(\%)$	2.6	7.9	13.2	18.4	23.7	28.9	34.2	39.5	44.7	50.0
序号 i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
故障时间 $t_{(i)}/\text{h}$	7.35	8.01	8.27	12	13.95	16	21.21	27.11	34.95	
$F_n(t_{(i)})/(\%)$	55.3	60.5	65.8	71.1	76.3	81.6	86.8	92.1	97.4	

在威布尔概率纸上绘制数据点 $(t_{(i)}, F_n(t_{(i)}))$,如图 7.9 所示。

$$\hat{m} = 0.9, \quad \hat{\eta} = 9.4, \quad \hat{\gamma} = 0, \quad \hat{t}_0 = \hat{\eta}^{\hat{m}} = 9.4^{0.9} = 7.51$$

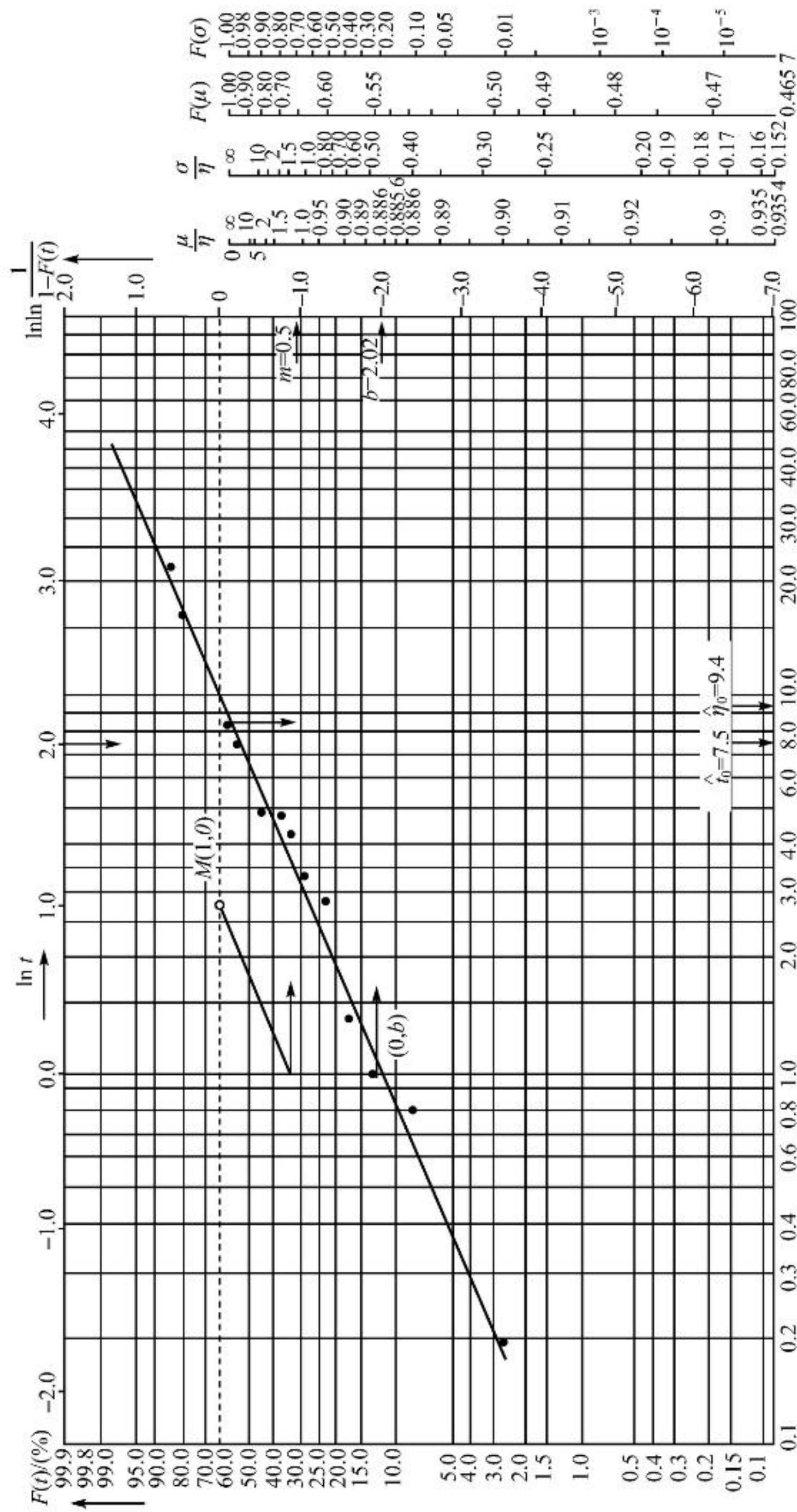


图 7.9 使用威布尔概率纸估计参数

2. 尺度的数据变换

威布尔概率纸上 t 尺的刻度范围是 $0.1 \sim 100$ 。为了扩大数轴的范围,作如下变换:令

$$t = t' \cdot 10^a$$

其中, t' 为原来的变化范围,即 $t' = 0.1 \sim 100$, a 为扩大倍数的幂指数。例如, t 值范围取为 $1 \sim 1000$ 时,则选 $a=1$;如取 t 为 $10 \sim 10000$,则选 $a=2$ 。

对 t 尺作了变换后,威布尔分布函数的参数也要起相应的变化。因为

$$F(t) = F(t' \cdot 10^a) = 1 - e^{-(t' \cdot 10^a - \gamma)^m / t_0} = 1 - e^{\frac{-10^{ma} (t' - 10^{-a} \gamma)^m}{t_0}} =$$

$$1 - e^{\frac{-(t' - 10^{-a} \gamma)^m}{t_0 \cdot 10^{-ma}}} = 1 - e^{\frac{-(t' - \gamma')^m}{t'_0}} = F^*(t')$$

其中, $m' = m$, 且

$$\gamma' = 10^{-a} \gamma \quad (7.32)$$

$$t'_0 = 10^{-ma} t_0 \quad (7.33)$$

同时

$$\eta = t_0^{\frac{1}{m}} = (10^{ma} t'_0)^{\frac{1}{m}} = 10^a \cdot t'^{\frac{1}{m}}_0 = 10^a \cdot \eta' \quad (7.34)$$

由上述关系,若假定 $t', m', \gamma', t'_0, \eta'$ 为未变换 t 尺时的参数,则当 t 尺变换后,可得如下结论:

① t 轴扩大后,形状参数 m 值不变。

② t 轴扩大后,位置参数 γ 、真尺度参数 η 的扩大倍数与 t 轴扩大倍数相同,即

$$\gamma = 10^a \cdot \gamma' \quad (7.35)$$

③ t 轴扩大后,尺度参数 t_0 应作如下变换:

$$t_0 = t' \cdot 10^{ma} \quad (7.36)$$

3. 寿命特征的估计

由威布尔分布平均寿命和寿命方差的计算公式可知,当 $\gamma=0$ 时,有

$$\mu = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right), \quad \sigma^2 = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right]$$

由此可得

$$\frac{\mu}{\eta} = \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (7.37)$$

$$\frac{\sigma}{\eta} = \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.38)$$

又由分布函数 $F(t) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}$, 当令 $t = \mu$ 和 $t = \sigma$ 时,分别有

$$F(\mu) = 1 - e^{-[\Gamma(1 + \frac{1}{m})]^m} \quad (7.39)$$

$$F(\sigma) = 1 - e^{-[\Gamma(1 + \frac{2}{m}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{m})]^{\frac{m}{2}}} \quad (7.40)$$

其中,式(7.37)~式(7.40)中 $\mu/\eta, \sigma/\eta, F(\mu), F(\sigma)$ 都是 m 的函数,因此它们与 m 之间有一一

对应的关系,将此关系用 4 把与 m 相对应的尺子即 μ/η 尺、 σ/η 尺、 $F(\mu)$ 尺与 $F(\sigma)$ 尺列于威布尔概率纸右边,可用来对产品的寿命特征进行估计,这就是如图 7.9 右边所示的 4 把刻度尺。

(1) 平均寿命 μ 的估计

① 利用 $\frac{\mu}{\eta}$ 尺估计 μ :过所配直线与 x 轴的交点,下引垂线与 t 尺相交,其垂足就是真尺度参数的估计值 $\hat{\eta}$ 。然后过概率纸上 M 点作直线的平行线与 y 轴相交,过该交点右引水平线在 y 尺上读出 \hat{m} 值,再延伸到 $\frac{\mu}{\eta}$ 尺上,读出 $\left(\frac{\mu}{\eta}\right)$ 的值。最后由 $\hat{\mu} = \left(\frac{\mu}{\eta}\right) \times \hat{\eta}$ 计算得到平均寿命的估计值 $\hat{\mu}$ 。其过程如图 7.10 所示。

② 利用 $F(\mu)$ 尺估计 μ :过 M 点作所配直线的平行线与 y 轴相交,由该交点右引水平线过与 y 尺相交的 m 估计点延伸到 $F(\mu)$ 尺上,然后在 $F(t)$ 尺上找到读数为 $F(\mu)$ 的点,从该点右引水平线与直线相交,由交点下引垂线与 t 尺相交的垂足就是平均寿命的估计值 $\hat{\mu}$ 。其过程如图 7.11 所示。

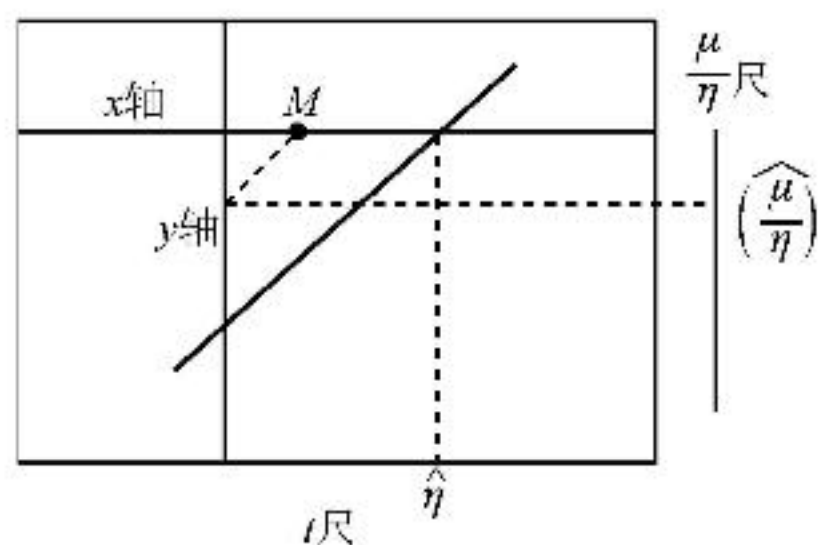


图 7.10 用 $\frac{\mu}{\eta}$ 尺估计 μ

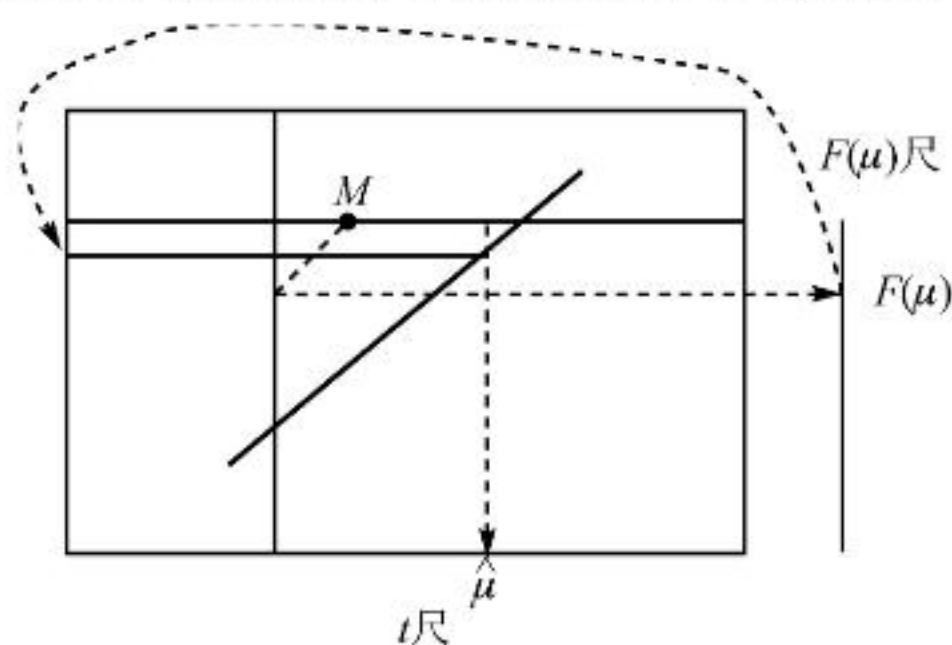


图 7.11 用 $F(\mu)$ 尺估计 μ

(2) 标准差 σ 的估计

① 利用 $\frac{\sigma}{\eta}$ 尺估计 σ :过 M 点作所配直线的平行线与 y 轴相交,过该交点右引水平线,通过 y 尺上的 m 估计点后再延长到 $\frac{\sigma}{\eta}$ 尺上,得到 $\frac{\sigma}{\eta}$ 的估计值 $\left(\frac{\sigma}{\eta}\right)$;另一方面由直线与 x 轴的交点下引垂线与 t 尺的交点就是 η 的估计值 $\hat{\eta}$ 。因此,用公式 $\hat{\sigma} = \hat{\eta} \cdot \left(\frac{\sigma}{\eta}\right)$ 计算,得到标准差的估计值 $\hat{\sigma}$ 。其过程如图 7.12 所示。

② 利用 $F(\sigma)$ 尺估计 σ :过 M 点作所配直线的平行线与 y 轴相交,过交点右引水平线与 y 尺相交,通过 m 的估计点再延伸到 $F(\sigma)$ 尺上,得到 $F(\sigma)$ 的值,然后在 $F(t)$ 尺上找到读数为 $F(\sigma)$ 的点,过该点右引水平线与直线相交,由交点下引垂线与 t 尺相交,其垂足就是估计值 $\hat{\sigma}$ 。其过程如图 7.13 所示。

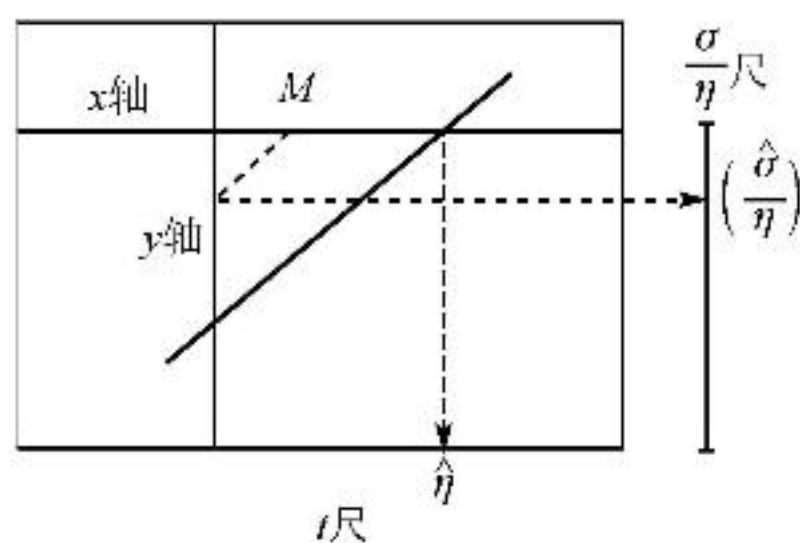


图 7.12 用 $\frac{\sigma}{\eta}$ 尺估计 σ

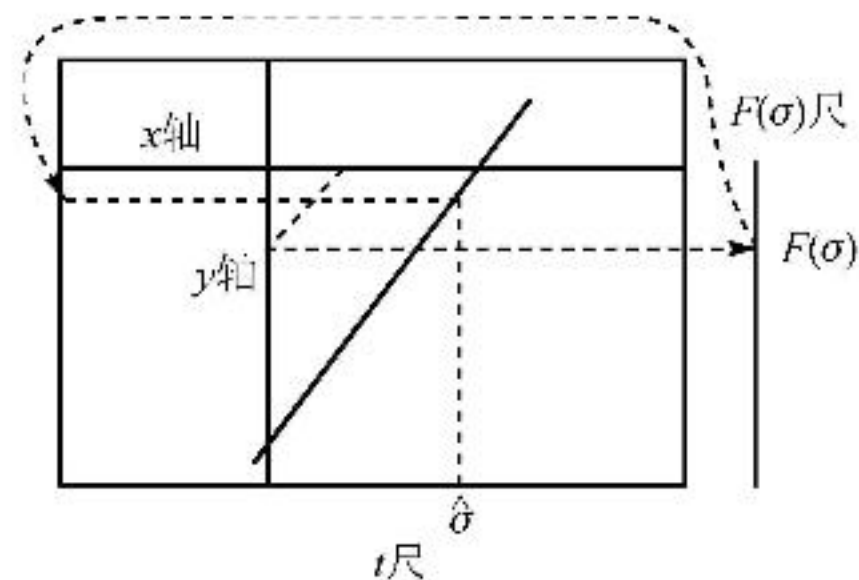


图 7.13 用 $F(\sigma)$ 尺估计 σ

(3) 产品可靠度和可靠寿命的估计

1) 产品可靠度的估计

首先在 t 尺上找到时间为 t 的点, 然后由 t 点上引垂线与所配直线相交, 过交点左引水平线与 $F(t)$ 轴交于 $F(t)$ 点, 再由 $R(t) = 1 - F(t)$ 计算求得对应时间为 t 时产品的可靠度。具体做法如图 7.14 所示。

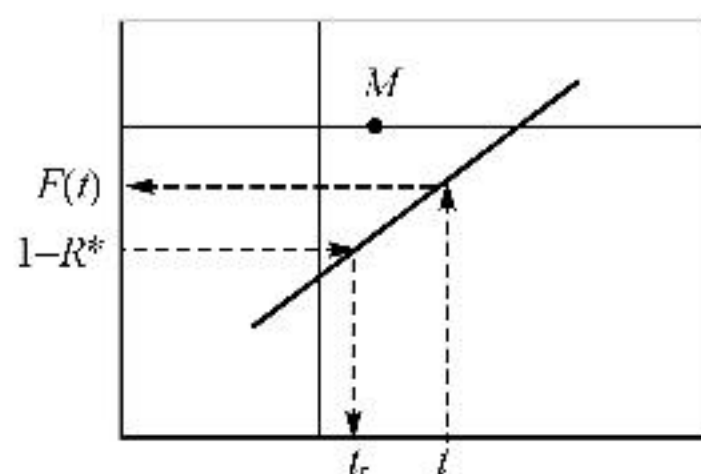


图 7.14 可靠度和可靠寿命的估计

2) 可靠寿命 $t(R)$ 的估计

对于给定的可靠度 R^* , 在 $F(t)$ 轴上找到其值为 $1 - R^*$ 的点, 由该点右引水平线与直线相交, 其垂足就是可靠寿命 $t(R)$ 的估计值 $\hat{t}(R^*)$, 如图 7.14 所示。

例 7.7 表 7.6 是 8 台机电设备从开始使用到发生故障的时间数据, 若已知该设备的寿命服从威布尔分布, 试估计其参数 m, t_0 和 γ 。

表 7.6 机电设备故障时间的经验分布函数计算

t/h	123	170	215	289	290	462	552	779
t'	12.3	17.0	21.5	28.9	29.0	46.2	55.2	77.9
$F_n(t)/(\%)$	8.3	20	32	44	56	68	80	92
$t' - \gamma'$	3.3	8.0	12.5	19.9	20.0	37.2	46.2	68.0

解：由中位秩表查得 $n=8$ 时，每台设备故障时的平均秩，进而得到其经验分布函数 $F_n(t)$ ，如表 7.6 第三行所列。分布时间 t 超过了威布尔概率纸的范围，因此需要对 t 作数据变换。 $t=10t'$ ，按 $(t'_{(i)}, F(t'_{(i)}))$ 的数据在威布尔概率纸上描点，如图 7.15 所示。

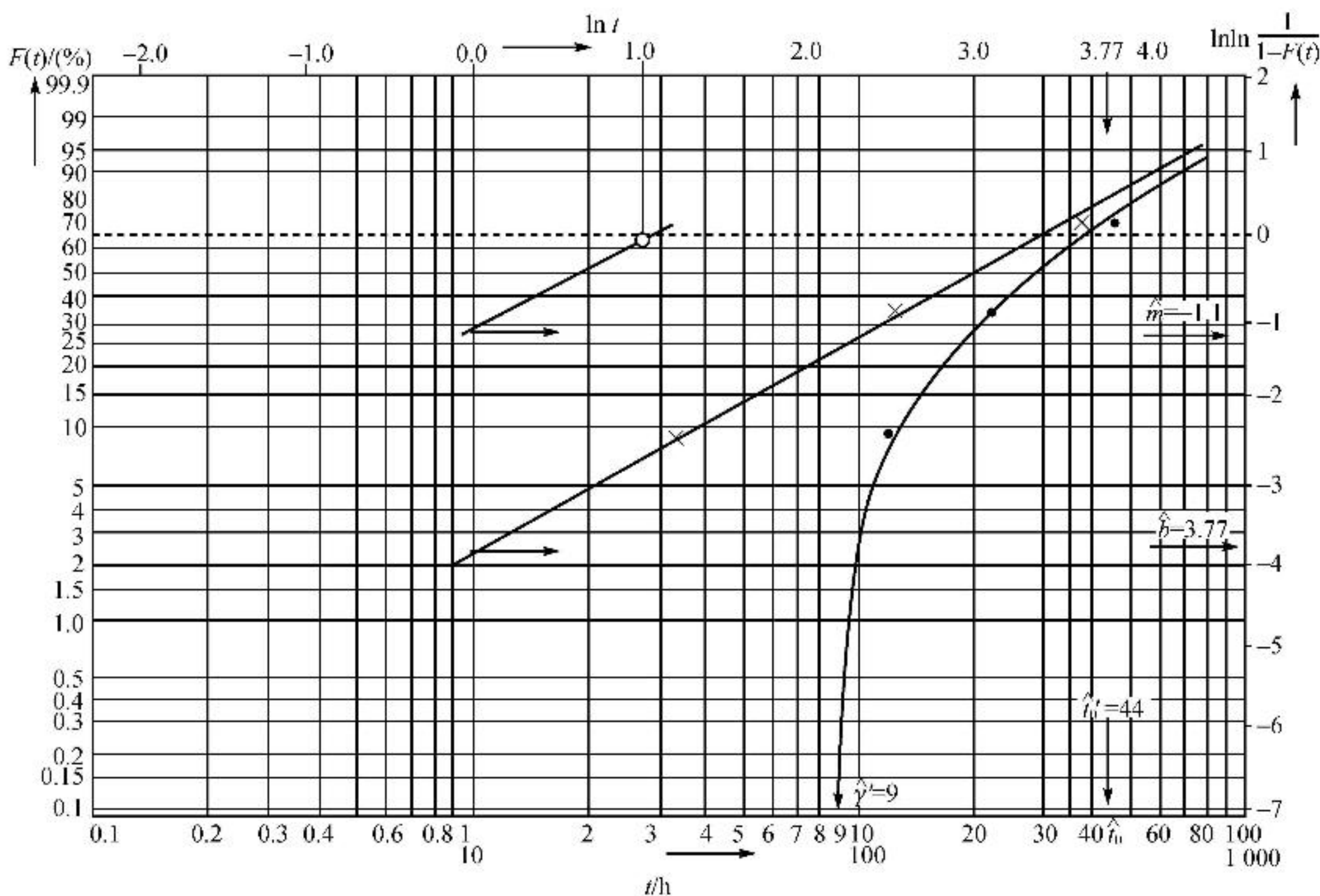


图 7.15 描点结果

将所描的点连为一条曲线，说明 $\gamma' > 0$ ，因此顺势将曲线延长交 t 尺于 9，即 $\hat{\gamma}' = 9$ ，然后得 $t'_i - \hat{\gamma}'$ ，将每点左移后，发现能近似为直线，以此直线按前述方法估计参数，得

$$\hat{m} = 1.1$$

$$\hat{t}_0 = \hat{t}'_0 \times 10^{\hat{m}} = 44 \times 10^{1.1} = 554$$

$$\hat{\gamma} = \hat{\gamma}' \times 10 = 9 \times 10 = 90$$

(4) 超出威布尔概率纸范围时的估计法

1) 所配直线与 x, y 轴都不相交

如图 7.16 所示，所配直线与两轴都不相交。此时将直线延长交 y 尺于点 A，过点 A 作水平线交 $F(t)$ 尺于点 B，从点 B 引所配直线的平行线 BC 交 x 轴于点 C，过点 C 下引垂线交 t 尺于 $\hat{\gamma}'$ 。

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}' \cdot 1\,000 \quad (7.41)$$

其原理可从图 7.16 中看出, 平行四边形 $ABCD$ 中 $CD=AB$ 。 t 尺是对数坐标, x 轴上从 D 到 C 相当于在 t 尺上增大 1 000 倍, 因此得式(7.41)。

2) 超出 t 尺范围的估计

例如, t 轴的范围为 $0.1 \sim 100$, 如何估计 $t=5\,000$ 时的 $F(t)$ 呢?

从所配直线与 y 尺的交点左引水平线和 $F(t)$ 尺相交, 从交点引平行于所配直线的平行线, 又从 t 尺上 $t=5$ 的点上引垂线和这条水平线相交, 再从交点左引水平线和 $F(t)$ 尺相交, 交点刻度就是 $F(t)$ 的估计值, 如图 7.17 所示。

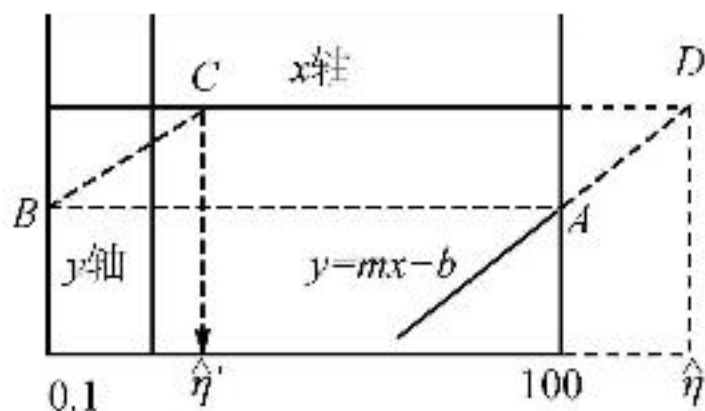


图 7.16 所配直线与两轴无交点时的估计

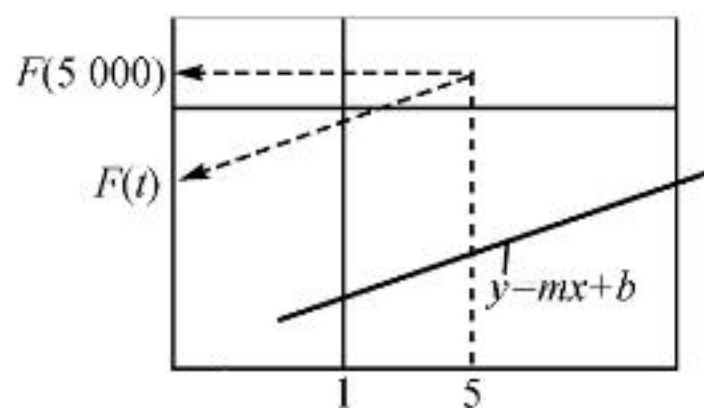


图 7.17 超出 t 尺范围时的估计

3) 超出 $F(t)$ 尺范围的估计

$F(t)$ 尺的最小值为 0.1% , 如果要求产品的 $F(t) < 0.1\%$, 那么其 t 值应如何求解呢? 理论上, 当 $0 < x < 1$ 时, $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$, $\ln(1+x) \approx x$, 所以

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \approx \ln \ln [1+F(t)] \approx \ln F(t) \quad (7.42)$$

因此, 若 $F(t)=0.01$ 或 $F(t)=0.001$, 则有

$$\ln \ln \frac{1}{1-0.01} - \ln \ln \frac{1}{1-0.001} \approx \ln 0.01 - \ln 0.001 = \ln 10$$

这说明威布尔概率纸上 $F(t)$ 轴 1% 和 0.1% 两点间线段长度等于 $\ln 10$ 。由式(7.42)还可得到

$$\ln \ln \frac{1}{1-F(t)} \approx \ln F(t) = \ln \frac{10F(t)}{10} = \ln [10F(t)] - \ln 10$$

该式说明将 $F(t)$ 轴上 $1\% \sim 0.1\%$ 之间的点值扩大 10 倍以后, 再下移 $\ln 10$ 的位置, 就得到 $F(t)$ 的点。因此, 把威布尔概率纸的下部加以扩充, 即将一张概率纸上 1% 以下部分沿 $F(t)=1\%$ 的水平线剪裁下来, 并把其上的刻度各除以 10, 增加到概率纸的下面, 如图 7.18 所示。

如果扩充的范围还不够, 可按此法继续进行, 只是要注意刻度的变化。

在不扩充概率纸的情况下, 也可用下面的方法来进行估计, 如求 $F(t)=0.05\%$ 时的工作时间。其过程如图 7.19 所示。

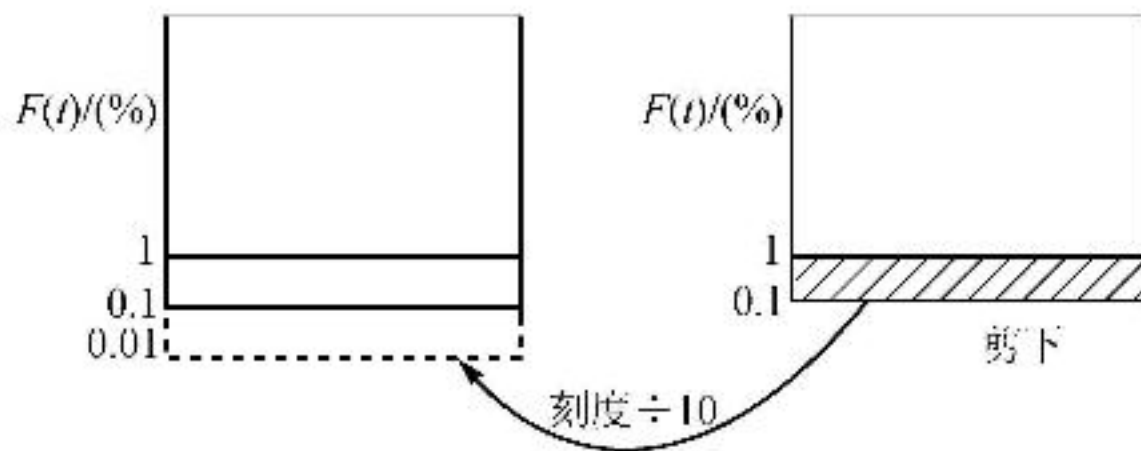


图 7.18 超出 $F(t)$ 尺范围时的估计

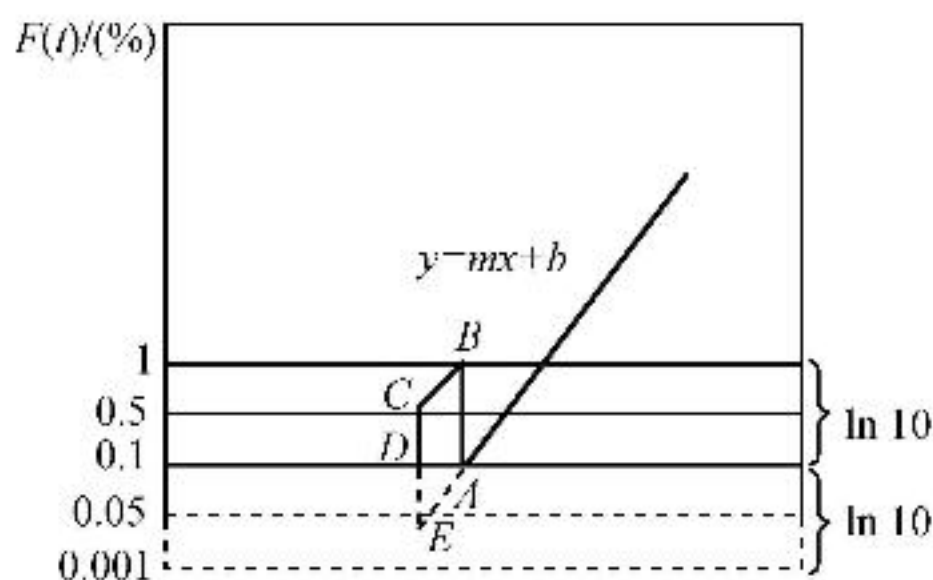


图 7.19 超出 $F(t)$ 尺在原概率纸上作图估计

其原理易从图 7.19 中看出, 平行四边形 $ABCE$ 中 E 点对应的 $F(t)$ 值应为 0.05% , 因为 AB 的长度为 $\ln 10$, 由前所述, 它们反映在 $F(t)$ 尺上正好相差 10 倍。因此, 当 C 点为 0.5% 时, E 点对应的 $F(t) = 0.05\%$ 。那么从 E 点上引垂线与 t 尺的交点就是 D 点, 所以 D 点代表的 t 值就是对应于 $F(t) = 0.05\%$ 的 t 值。

7.2 参数的区间估计

本节首先以基于最优线性无偏估计的区间估计为例进行讨论, 通过线性估计给出参数的区间估计; 然后讨论基于极大似然估计的参数区间估计。

7.2.1 基于线性估计的区间估计

设产品寿命 T 服从威布尔分布 $W(m, \eta)$, 由定数截尾试验得到顺序统计量 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$, 经变换 $X = \ln T$, 得 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(r)}$, 并且 X 服从参数 μ, σ ($\sigma = \frac{1}{m}, \mu = \ln \eta$) 的极值分布。设 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 为 μ, σ 的最优线性无偏估计, 下面构造它们的区间估计。

1. σ 的区间估计

建立枢轴量

$$W = \frac{\hat{\sigma}}{(1 + l_{r,n})\sigma}$$

其中, $l_{r,n}$ 为 σ 的方差系数, 可查附表 B. 1。找出 W 的分布, 记其概率为 α 的分位点为 W_α , 则

$$P\left(W_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\sigma}}{(1 + l_{r,n})\sigma} \leq W_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

由此得到 σ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\sigma_L = \frac{\hat{\sigma}}{(1 + l_{r,n})W_{1-\frac{\alpha}{2}}} \quad \text{与} \quad \sigma_U = \frac{\hat{\sigma}}{(1 + l_{r,n})W_{\frac{\alpha}{2}}}$$

由此得到 m 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$m_L = \frac{(1 + l_{r,n})W_{\frac{\alpha}{2}}}{\hat{\sigma}} \quad \text{与} \quad m_U = \frac{(1 + l_{r,n})W_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\hat{\sigma}} \quad (7.43)$$

其中, W 的分布可查附表 B. 5。

2. μ 的区间估计

建立枢轴量

$$V = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}}$$

V 的分布与 μ, σ 无关, 可用随机模拟的方法获得 V 分布的分位点。给定置信水平 $1 - \alpha$, 则

$$P\left(\frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}} < V_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

即

$$P(\mu > \hat{\mu} - \hat{\sigma}V_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

其中, V 分布的分位点见附表 B. 6。因此, μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限为

$$\mu_L = \hat{\mu} - \hat{\sigma}V_{1-\alpha} \quad (7.44)$$

同理, 可得到 μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \mu_U &= \hat{\mu} - \hat{\sigma}V_{\alpha/2} \\ \mu_L &= \hat{\mu} - \hat{\sigma}V_{1-\alpha/2} \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

由此, 得到 η 的区间估计

$$\left. \begin{aligned} \eta_L &= e^{\mu_L} \\ \eta_U &= e^{\mu_U} \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

关于线性估计的区间估计的进一步了解, 读者可参阅参考文献[2]。

7.2.2 基于极大似然估计的区间估计

下面介绍一种当参数点估计用极大似然估计时, 两参数威布尔分布的参数区间估计方法。

它适用于完全样本及定数、定时试验子样。设有 n 个产品进行试验, 试验截止时间为 t_0 或 $t_{(r)}$, 共有 r 个产品发生故障, 故障时间为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} \leq t_0$ 。假定已由极大似然估计给出参数的点估计 \hat{m} 和 $\hat{\eta}$ 。

(1) 参数 m 的区间估计

在置信度为 $1-\alpha$ 时, 参数 m 的置信区间为

$$[W_1 \hat{m}, W_2 \hat{m}] \quad (7.47)$$

其中, W_1, W_2 为系数, 用以下方法计算, 即

$$W_1 = \left(\frac{K_1}{rc} \right)^{\frac{1}{1+q^2}} \quad (7.48)$$

$$W_2 = \left(\frac{K_2}{rc} \right)^{\frac{1}{1+q^2}} \quad (7.49)$$

其中

$$q = r/n \quad (7.50)$$

$$c = 2.146\ 28 - 1.361\ 119 \times q \quad (7.51)$$

$$K_1 = \chi_{\alpha/2}^2 [c(r-1)] \quad (7.52)$$

$$K_2 = \chi_{1-\alpha/2}^2 [c(r-1)] \quad (7.53)$$

当自由度较大时, 查 χ^2 分布表不方便, 可用正态分布近似, 按下列公式计算 χ^2 分布的分位点, 即

$$\chi_p^2(v) \approx v[1 - 2/(9v) + u_p \sqrt{2/(9v)}]^3 \quad (7.54)$$

其中, u_p 为标准正态分布的 p 分位点。

(2) 参数 η 的区间估计

在置信度为 $1-\alpha$ 时, 参数 η 的置信区间为

$$[A_1 \hat{\eta}, A_2 \hat{\eta}] \quad (7.55)$$

其中, A_1, A_2 为系数, 其计算分完全样本 ($n=r$) 和截尾样本 ($r < n$) 两种情形进行。

首先计算以下常数:

$$A_4 = 0.49q - 0.134 + 0.622q^{-1} \quad (7.56)$$

$$A_5 = 0.244\ 5 \times (1.78 - q) \times (2.25 + q) \quad (7.57)$$

$$A_6 = 0.029 - 1.083 \times \ln(1.325q) \quad (7.58)$$

当 $r < n$ 时, 计算常数:

$$d_1 = \frac{[A_3 + x \sqrt{x^2(A_6^2 - A_4 A_5)} + r A_4]}{r - A_5 x^2} \quad (7.59)$$

$$d_2 = \frac{[A_3 - x \sqrt{x^2(A_6^2 - A_4 A_5)} + r A_4]}{r - A_5 x^2} \quad (7.60)$$

其中, $x = u_{1-\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $1-\alpha/2$ 分位点。

$$A_3 = -A_6 \cdot x^2 \quad (7.61)$$

$$A_1 = e^{-d_1/\hat{m}} \quad (7.62)$$

$$A_2 = e^{-d_2/\hat{m}} \quad (7.63)$$

将 A_1, A_2 代入式(7.55)求得截尾样本情形下 η 的置信区间。

对完全样本, 即 $r=n$, 计算 $d_3 = t_{1-\alpha/2}(n-1)$, 将 d_3 代入以下 A_1, A_2 计算式, 即

$$A_1 = e^{\frac{-1.053d_3}{\hat{m}\sqrt{n-1}}} \quad (7.64)$$

$$A_2 = e^{\frac{1.053d_3}{\hat{m}\sqrt{n-1}}} \quad (7.65)$$

将 A_1, A_2 代入式(7.55)求得完全样本情形下 η 的区间估计。

(3) 可靠寿命 t_R 的置信下限

对可靠度为 R 时的可靠寿命, 在参数点估计已知时, 用下式计算其点估计, 即

$$\hat{t}_R = \hat{\eta}[\ln(1/R)]^{1/\hat{m}} \quad (7.66)$$

在置信度为 $1-\alpha$ 的条件下, 可靠度为 R 时的可靠寿命的置信下限为

$$\hat{t}_{R,L} = Q_1 \cdot \hat{t}_R \quad (7.67)$$

系数 $Q_1 = e^{\frac{\delta_1 + m_1}{\hat{m}}}$, 其中

$$\delta_1 = \frac{-A_6 y^2 - r m_1 + y \sqrt{(A_6^2 - A_4 A_5) y^2 + r A_4 + 2 r m_1 A_6 + r A_5 m_1^2}}{r - y^2 A_5} \quad (7.68)$$

$$m_1 = \ln(-\ln R) \quad (7.69)$$

其中, $y = u_\alpha$ 指标准正态分布的 α 分位点。

(4) 可靠度的置信下限

对应于某个时刻 t 的可靠度 $R(t)$ 的点估计为

$$\hat{R}(t) = e^{-(t/\hat{\eta})^{\hat{m}}} \quad (7.70)$$

在置信度为 $1-\alpha$ 时, $R(t)$ 的置信下限为

$$R_L(t) = e^{-c_t - u_\alpha \sqrt{A_0/r}} \quad (7.71)$$

其中

$$c_t = \hat{m} \ln(\hat{\eta}/t) \quad (7.72)$$

$$A_0 = A_4 + c_t^2 - 2c_t A_6 \quad (7.73)$$

例 7.8 40 个样品进行定数截尾试验, 在故障数为 20 时停止试验, 记录故障时间, 用极大似然估计其威布尔分布参数为 $\hat{m}=2.091, \hat{\eta}=84$ 。现在 90 % 的置信水平下, 计算参数的区间估计及可靠寿命 $t_{0.9}$ 和 $t=50$ 时的可靠度。

解: $n=40, r=20, q=r/n=0.5, \hat{m}=2.091, \hat{\eta}=84, 1-\alpha=0.9$ 。

① m 的估计。

由式(7.51)得

$$c = 2.146\ 28 - 1.361\ 119 \times q = 2.146\ 28 - 1.361\ 119 \times 0.5 = 1.465\ 72$$

$$K_1 = \chi_{\alpha/2}^2 [c(r-1)] = \chi_{0.05}^2 (27.85)$$

$$K_2 = \chi_{1-\alpha/2}^2 [c(r-1)] = \chi_{0.95}^2 (27.85)$$

由式(7.54)得

$$K_1 = 27.85 \times \left(1 - \frac{2}{9 \times 27.85} + u_{0.05} \sqrt{\frac{2}{9 \times 27.85}} \right)^3 = 16.81$$

$$K_2 = 27.85 \times \left(1 - \frac{2}{9 \times 27.85} + u_{0.95} \sqrt{\frac{2}{9 \times 27.85}} \right)^3 = 41.14$$

由式(7.48)和式(7.49)可知

$$W_1 = \left(\frac{K_1}{rc} \right)^{\frac{1}{1+q^2}} = \left(\frac{16.81}{20 \times 1.465\ 72} \right)^{\frac{1}{1+0.5^2}} = 0.640\ 9$$

$$W_2 = \left(\frac{K_2}{rc} \right)^{\frac{1}{1+q^2}} = \left(\frac{41.14}{20 \times 1.465\ 72} \right)^{\frac{1}{1+0.5^2}} = 1.311\ 4$$

由式(7.47)得到 m 的 90 % 的区间估计为 $[1.340\ 1, 2.742\ 1]$ 。

② η 的估计。

由 A_4, A_5, A_6 的计算式得

$$A_4 = 1.355, \quad A_5 = 0.860\ 6, \quad A_6 = 0.474\ 9$$

$$A_3 = -A_6 x^2 = -1.285$$

$$d_1 = 0.388\ 6, \quad d_2 = -0.534, \quad A_1 = 0.83, \quad A_2 = 1.29$$

因此, 得到 η 的 90 % 的区间估计 $[69.72, 108.36]$ 。

③ $t_{0.9}$ 的 90 % 置信下限。

$$\hat{t}_{0.9} = 28.56$$

由 m_1 和 δ_1 的计算式得

$$m_1 = -2.250\ 4, \quad \delta_1 = 1.803, \quad \hat{t}_{0.9,L} = 23.06$$

④ $t=50$ 时的可靠度的 90 % 置信下限。

$$\hat{R}(50) = e^{-(50/84)^{2.091}} = 0.713$$

由 c_i 与 A_0 的计算公式, 得 $c_i = 1.085, A_0 = 1.337\ 6$, 因此

$$R_L(50) = 0.624\ 7$$

习 题

7.1 从某种绝缘材料中随机地抽取 $n=19$ 只样品。在一定条件下进行寿命试验,其失效时间(单位:h)分别为 0.19, 0.78, 0.96, 1.31, 2.78, 3.16, 4.15, 4.67, 4.85, 6.50, 7.35, 8.01, 8.27, 12.00, 13.95, 16.00, 21.21, 27.11, 34.95。试检验其是否服从威布尔分布。如服从威布尔分布,请给出参数 m 和 η 的极大似然估计。

7.2 从服从威布尔分布的某产品中随机抽取 15 支进行寿命试验,有 10 支失效,其失效时间(单位:h)分别为 1.9, 3.9, 6.1, 8.0, 8.5, 11.0, 13.4, 15.7, 17.9, 22.4, 用最小二乘法估计参数 m 和 η ,并求出可靠度为 0.9 时的可靠寿命与工作 5 h 时的失效率。

7.3 设某仪器的寿命服从威布尔分布,现从中随机抽取 10 台进行截尾寿命试验,试验到有 6 台失效时停止,观测到的 6 个失效时间(单位:h)为 8, 20, 34, 46, 63, 86。试用 BLUE 和 BLIE 分别作出威布尔分布参数 m 和 η 的估计。

7.4 设某产品的寿命服从威布尔分布,现从中随机抽取 30 台进行截尾寿命试验,试验进行到有 18 只产品失效时停止。观测到的 18 个失效时间(单位:h)为 9, 24, 34, 48, 50, 63, 67, 84, 100, 111, 114, 116, 116, 118, 135, 139, 163, 171。试用 GLUE 和 GLIE 分别作出威布尔分布参数 m 和 η 的估计。

7.5 根据习题 7.3 中的数据,分别给出威布尔分布参数 m 和 η 基于极大似然估计的置信水平为 0.9 的区间估计。

7.6 设某产品的寿命服从威布尔分布,现从中随机抽取 18 台进行截尾寿命试验,试验进行到有 8 只产品失效时停止。观测到的 8 个失效时间(单位:h)为 24, 48, 63, 84, 111, 135, 163, 171。分别给出威布尔分布参数 m 和 η 在置信水平为 0.9 时,基于线性估计的区间估计。

7.7 对习题 7.1,试用威布尔概率纸给出威布尔分布参数 m 和 η 的估计。

第 8 章 正态分布与对数正态分布的统计推断

正态分布和对数正态分布是可靠性定量分析中常用的重要寿命分布类型。本章将介绍正态分布和对数正态分布参数的点估计与区间估计,并在此基础上进行可靠性数据分析。

8.1 参数的点估计

8.1.1 参数的极大似然估计

对数正态分布的密度函数是

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} e^{-\frac{(\ln t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad t > 0$$

以定时截尾试验子样为例,推导分布参数的极大似然估计。设子样容量为 n , 试验至 t_0 时截止,共失效 r 个,其顺序统计量为

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)} \leq t_0 \Leftrightarrow \ln t_{(1)} \leq \ln t_{(2)} \leq \cdots \leq \ln t_{(r)} \leq \ln t_0$$

则似然函数为

$$L(\mu, \sigma) = \frac{n!}{(n-r)!} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right\}^r \prod_{i=1}^r \frac{1}{t_{(i)}} e^{-\left\{ \frac{1}{2\sigma^2} [\ln t_{(i)} - \mu]^2 \right\}} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln t_0 - \mu}{\sigma}\right) \right]^{n-r} \quad (8.1)$$

设 $Z_0 = (\ln t_0 - \mu)/\sigma$, 标准正态分布函数 $\Phi(-Z_0) = 1 - \Phi(Z_0)$, 并记 $\phi(Z_0)$ 为标准正态分布密度函数,则似然方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^r (\ln t_{(i)} - \mu) + \frac{n-r}{\sigma} \frac{\phi(Z_0)}{\Phi(-Z_0)} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} &= -\frac{r}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^r (\ln t_{(i)} - \mu)^2 + (n-r) \frac{\phi(Z_0)}{\Phi(-Z_0)} \cdot \frac{\ln t_0 - \mu}{\sigma^2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

然后,使用数值方法求解上述超越方程组,即可得到参数 μ, σ 的极大似然估计。

对于定数截尾寿命试验,与定时截尾相同,只需令 t_0 为 $t_{(r)}$ 即可。正态分布与对数正态分布估计的不同之处在于不必对其寿命数据取对数,即式中的 $X_{(i)}$ 直接用 $t_{(i)}$ 代替即可。

8.1.2 定数截尾情形下参数的线性估计

1. 最优线性无偏估计

对数正态分布的分布函数为

$$F(t)=\int_0^t\frac{\lg e}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{(\lg x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

这里 \lg 指以 10 为底的常用对数。设 $X=\lg t, Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$, 则标准化后有

$$F(t)=\Phi\left(\frac{\lg t-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(Z)$$

在一批产品中随机抽取 n 个样品, 至 r 个失效时停止试验, 得顺序统计量为

$$t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(r)}$$

则

$$\lg t_{(1)}\leqslant\lg t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\lg t_{(r)}$$

2. 最优线性不变估计

根据最优线性不变估计与最优线性无偏估计的关系,可得 μ 和 σ 的最优线性不变估计 (BLIE) 为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu} &= \hat{\mu} - \frac{B_{r,n}}{1+l_{r,n}}\hat{\sigma} \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\hat{\sigma}}{1+l_{r,n}} \end{aligned} \right\} \tag{8.4}$$

其中, $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$ 指 μ, σ 的最优线性无偏估计, $B_{r,n}$ 和 $l_{r,n}$ 可查附表 B. 3 或参考文献[1]的表 5。

例 8.2 某电机寿命服从对数正态分布,现抽取 10 台进行定数截尾寿命试验,直到有 6 台失效为止,结果如表 8.2 所列,现对其参数进行最优线性不变估计。

表 8.2 对数正态分布参数最优线性无偏估计系数表二

j	$t_{(j)}/\text{h}$	$\lg t_{(j)}$	$D'(10,6,j)$	$C'(10,6,j)$
1	3 610	3.557 6	-0.031 6	-0.393 0
2	4 428	3.646 3	0.038 3	-0.206 3
3	4 690	3.671 2	0.070 7	-0.119 2
4	5 648	3.751 9	0.096 2	-0.050 1
5	5 815	3.764 6	0.118 5	0.011 1
6	6 367	3.804 0	0.707 8	0.757 6

解: 查附表 B. 3,得 $D'(n,r,j)$ 和 $C'(n,r,j)$ 分别填入表 8.2 中,由式(8.2)和式(8.3),得 μ, σ 的最优线性无偏估计

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \sum_{j=1}^6 D'(10,6,j) \lg t_{(j)} = 3.786\ 3 \\ \hat{\sigma} &= \sum_{j=1}^6 C'(10,6,j) \lg t_{(j)} = 0.465\ 4 \end{aligned}$$

再从附表 B. 3 中查得

$$A_{r,n} = A_{6,10} = 0.133\ 6, \quad l_{r,n} = l_{6,10} = 0.123\ 7, \quad B_{r,n} = B_{6,10} = 0.046\ 5$$

由此得到 μ, σ 的最优线性不变估计

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 3.786\ 3 - \frac{0.046\ 5}{1+0.123\ 7} \times 0.465\ 4 = 3.767\ 0 \\ \tilde{\sigma} &= \frac{0.465\ 4}{1+0.123\ 7} = 0.414\ 2 \end{aligned}$$

3. 简单线性无偏估计

参数 μ 和 σ 的简单线性无偏估计(GLUE)为

$$\hat{\sigma}_s = \frac{\sum_{i=1}^r [\lg t_{(r)} - \lg t_{(i)}]}{n k_{r,n}} = \frac{1}{n k_{r,n}} \left[r \ln t_{(r)} - \sum_{i=1}^r \lg t_{(i)} \right] \quad (8.5)$$

$$\hat{\mu}_s = \lg t_{(r)} - E(Z_{(r)}) \cdot \hat{\sigma}_s \quad (8.6)$$

其中, $E(Z_{(i)})$ 为标准正态分布第 i ($i=1, 2, \dots, r$) 个顺序统计量的期望, 可查附表 B. 4 或参考文献[1]的表 6。

例 8.3 设某产品寿命服从对数正态分布, 从中抽取 25 个产品进行寿命试验, 试验到有 4 个失效时停止试验, 失效时间(单位:h)为 5, 120, 230, 410。现用 GLUE 估计其参数 μ 和 σ 。

解: 查附表 B. 4, 得

$$n k_{r,n} = 1.5520, \quad E(Z_{(r)}) = -1.0668$$

因此

$$\hat{\sigma}_s = (4 \lg 410 - \lg 5 - \lg 120 - \lg 230 - \lg 410) / 1.5520 = 1.7378$$

$$\hat{\mu}_s = \lg 410 - (-1.0668) \times 1.7378 = 4.4667$$

4. 简单线性不变估计

根据简单线性不变估计与简单线性无偏估计的关系, 得到参数 μ 和 σ 的简单线性不变估计为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_I &= \frac{\hat{\sigma}_s}{1 + l_{r,n}} \\ \hat{\mu}_I &= \hat{\mu}_s - \frac{B_{r,n}}{1 + l_{r,n}} \hat{\sigma}_s \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

8.1.3 参数的最小二乘估计

1. 正态分布的参数估计

由正态分布函数可知 $F(t_i) = \Phi\left(\frac{t_i - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(Z_i)$, 因此

$$Z_i = \frac{t_i - \mu}{\sigma}, \quad t_i = \mu + \sigma Z_i \quad (8.8)$$

式(8.8)实际上是一个回归方程 $y = b_0 + b_1 x$ 。因此, 对于 Z_i 和 t_i 的一组数据, 可以用最小二乘法计算式(8.8)的回归系数 b_0, b_1 , 即可得到 μ, σ 的估计。计算步骤如下:

- ① 由已知的 $F(t_i)$ 查标准正态分布表得 Z_i , 而 $F(t_i)$ 可通过经验分布等方法估计。
- ② 根据 $\{(t_i, Z_i): i=1, 2, \dots, n\}$, 使用最小二乘法, 求出回归系数 b_0, b_1 和相关系数 r 。
- ③ 得分布参数的估计值 $\hat{\mu} = b_0, \hat{\sigma} = b_1$ 。

例 8.4 用表 4.7 中的故障数据, 假定产品服从正态分布, 用最小二乘估计求其平均寿命和寿命的标准差。

解：列表计算,见表 8.3。

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \frac{29\,667}{11} = 2\,697$$
$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{-11.348\,7}{11} = -1.031\,7$$

表 8.3 正态分布参数最小二乘估计计算表

序 号	t_i/h	$F(t_i)$	Z_i	$(t_i-\bar{t})/h$	$(t_i-\bar{t})^2$	$Z_i-\bar{Z}$	$(Z_i-\bar{Z})^2$	$(t_i-\bar{t}) \times (Z_i-\bar{Z})$
1	1 300	0.02	-2.054	-1 397	1 951 609	-1.022 3	1.045 1	1 428.153
2	1 692	0.041 6	-1.732	-1 005	1 010 025	-0.700 3	0.490 4	703.8
3	2 243	0.064 6	-1.517	-453	206 116	-0.465 3	0.235 5	220.33
4	2 278	0.090 6	-1.337	-419	175 561	-0.305 3	0.093 21	127.92
5	2 832	0.119	-1.18	135	18 225	-0.148 3	0.021 99	-20.02
6	2 862	0.150 5	-1.030 4	165	27 225	0.001 3	0.000 001 69	0.2145
7	2 931	0.185 9	-0.893	234	54 756	0.138 7	0.019 24	32.46
8	3 212	0.228 7	-0.740 3	515	265 225	0.291 4	0.084 91	150.07
9	3 256	0.283 6	-0.571 5	559	312 481	0.460 2	0.211 8	257.25
10	3 410	0.363 3	-0.35	713	508 369	0.681 7	0.464 7	486.05
11	3 651	0.522 5	0.056 5	954	910 116	1.088 2	1.184 2	1 038.14
总和	29 667		-11.348 7		5 439 708		3.851	4 424.37

由最小二乘估计可知

$$\hat{\sigma} = b_1 = \frac{4\,424.37}{3.851} = 1\,148.89$$
$$\hat{\mu} = b_0 = 3\,882.3$$

而相关系数

$$r = \frac{4\,424.37}{\sqrt{3.851 \times 5\,439\,708}} = 0.966\,7$$

相关系数 r 接近于 1,说明这组数据是符合正态分布的,从总体假设检验的角度讲,相关系数也可起到检验分布的作用。

2. 对数正态分布的参数估计

对数正态分布的分布函数可写成

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\frac{\lg t - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{\lg t - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(Z)$$

其中, $\Phi(Z)$ 指标准正态分布的分布函数, 且

$$Z = \frac{\lg t - \mu}{\sigma}, \quad \lg t = \sigma Z + \mu \quad (8.9)$$

令 $x = \lg t$, 则 $x = \sigma Z + \mu$ 等同于 $y = b_0 + b_1 x$ 。因此, 对于 Z 和 x 的一组数据, 同样可以用最小二乘法计算回归系数 b_0, b_1 和相关系数 r , 并得到对数正态分布参数的估计

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= b_0 \\ \hat{\sigma} &= b_1 \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

8.1.4 参数的图估计——正态概率纸与对数正态概率纸

1. 正态概率纸

标准化后的正态分布函数为

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

令 $Z = (t - \mu) / \sigma$, 则 $F(t) = \Phi(Z)$ 。 Z 和 t 呈线性关系, 所以在 (Z, t) 坐标系中 $Z = t / \sigma - \mu / \sigma$ 是一条直线, 而且坐标是等刻度的。另由 Z 和 $\Phi(Z)$ 的一一对应关系, 若用横轴表示 t , 纵轴表示成相应的 $\Phi(Z)$, 就构成了正态概率纸, 如图 8.1 所示。

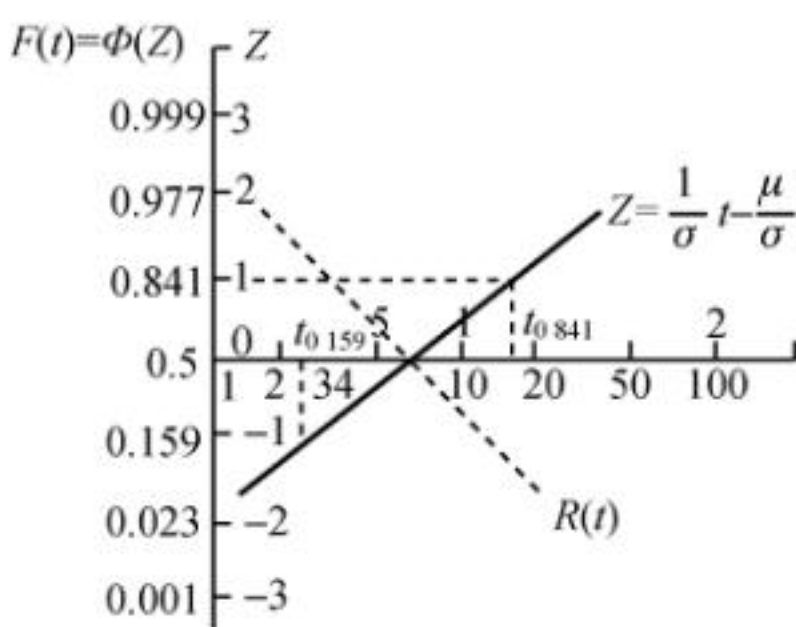


图 8.1 正态概率纸的构成和参数估计

由图 8.1 可知: 正态分布函数 $F(t)$ 在 $t - F(t)$ 坐标系中是一条直线。当 $Z = 0$ 时, $\Phi(Z) = F(t) = 0.5$, 记此时的时间 t 为 $t_{0.5}$, 由 $(t_{0.5} - \mu) / \sigma = 0$ 得

$$\hat{\mu} = t_{0.5} \quad (8.11)$$

由此可知: 过 $F(t) = 0.5$ 处右引水平线与所配直线相交, 该右引水平线作为 t 轴, 其交点的 t 值即为 $\hat{\mu}$ 。对于正态分布, μ 值正好是产品的平均寿命。对标准正态分布, 当 $Z = -1$ 时, $\Phi(Z) = F(t) = 0.159$, 记此时的 t 值为 $t_{0.159}$, 则有

$-1 = \frac{t_{0.159} - \mu}{\sigma}$, 所以 $\sigma = \mu - t_{0.159}$ 。另一方面, 当 $Z = 1$,

$\Phi(Z) = F(t) = 0.841$ 时, 同样可得 $\sigma = t_{0.841} - \mu$ 。由此可得如下做法: 过 $F(t) = 0.159$ 或 $F(t) = 0.841$ 向右引水平线与所配直线相交, 过交点引垂线与 t 轴相交, 其交点的 t 值刻度分别为 $t_{0.159}$ 和 $t_{0.841}$, 则

$$\hat{\sigma} = \hat{\mu} - t_{0.159} \quad \text{或} \quad \hat{\sigma} = t_{0.841} - \hat{\mu} \quad (8.12)$$

$\hat{\sigma}$ 即为标准差的估计。

概率纸上纵坐标代表概率, 因此它的最大值为 1, 最小值为 0。当 $F(t) = \Phi(Z) = 0$ 时, 相当于 $Z = -\infty$, 而当 $F(t) = \Phi(Z) = 1$ 时, 相应的 Z 为 $+\infty$, 因此在概率纸的纵轴上无法表示概

率为 1 和 0 的点,其他分布概率纸亦然。

将所得的观测数据在概率纸上描点时,若这些点的分布能接近于一条直线,则目测配一条直线,使直线两边的点数大致相同,各点单独或成组地交错分布在直线的两边,特别是在 $F(t)$ 的值为 0.5 附近(0.3~0.7 范围内),各点的偏差要尽可能小。

例 8.5 用表 4.7 中的故障数据,假定产品寿命服从正态分布,用正态概率纸估计其平均寿命和寿命的标准差。

解: 将试验的观测值 $\{(t_i, F_n(t_i)): i=1, 2, \dots, n\}$ 在概率纸上描点,如图 8.2 所示。将图中“×”点连成一条直线,在纵轴 50 %处右引水平线与直线相交后,下引垂线与横轴相交,得 $t_{0.5} = 3\,850\text{ h}$ 。又从纵轴 15.9 %处右引水平线与该直线相交后,下引垂线与横轴相交,得 $t_{0.159} = 2\,710\text{ h}$,则

$$\hat{\sigma} = \hat{\mu} - t_{0.159} = (3\,850 - 2\,710)\text{ h} = 1\,140\text{ h}$$

所以产品的平均寿命估计为 3 850 h,寿命的标准差估计为 1 140 h。

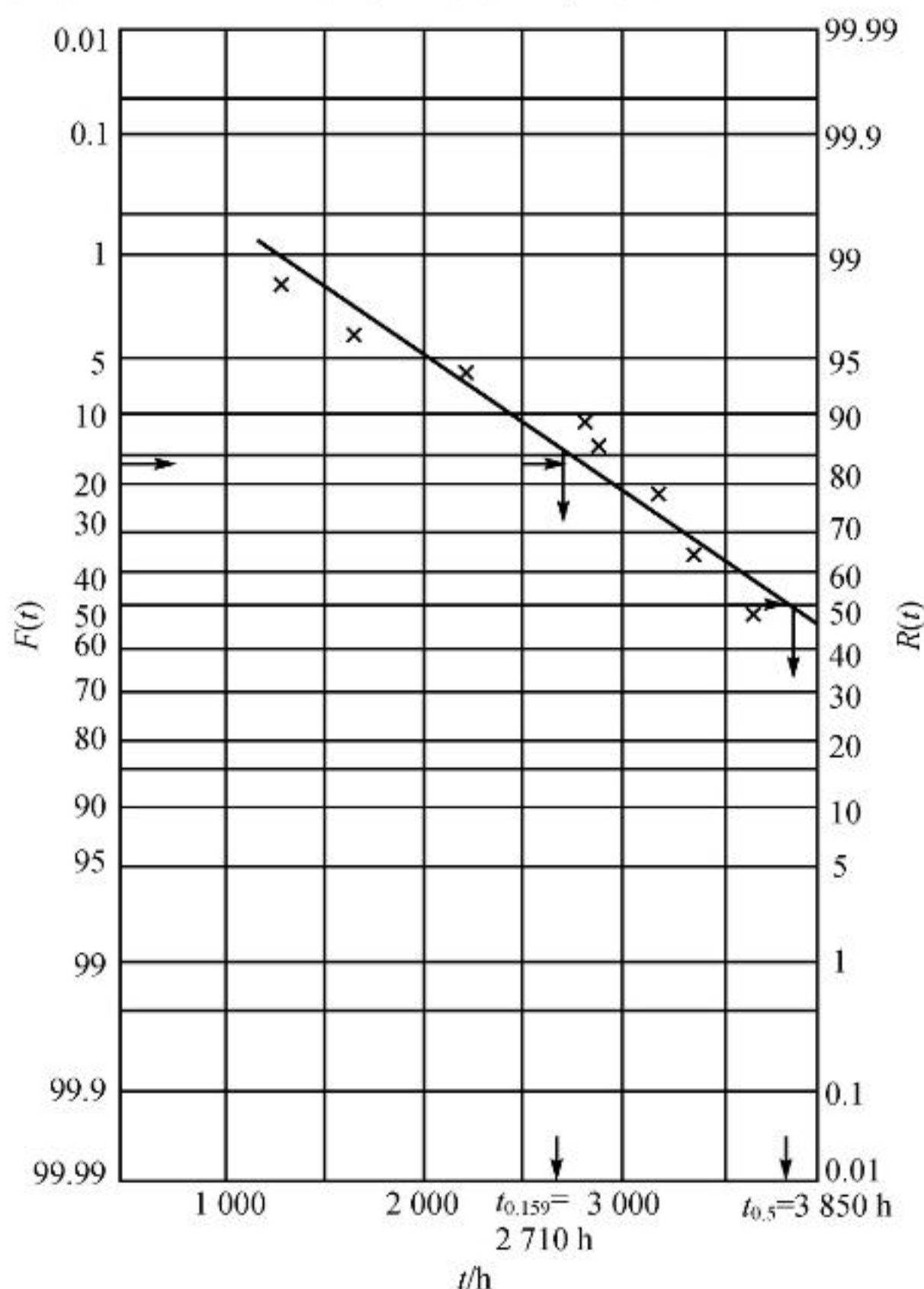


图 8.2 寿命分布参数的图估计

2. 对数正态概率纸

对数正态分布的分布函数可表示为

$$F(t) = \Phi\left(\frac{\lg t - \mu}{\sigma}\right)$$

令 $X = \lg t$, 则 $F(X) = \Phi((X - \mu)/\sigma)$, 再令 $Z = (X - \mu)/\sigma$, 得到 $F(t) = \Phi(Z)$, 这和正态概率纸的构成原理相同。不同的是, 这里 Z 和 t 的关系是通过 $X = \lg t$ 与 $Z = (X - \mu)/\sigma$ 相联系的。因此需把图 8.1 的横坐标轴也配置上对应的 t 和 $\lg t$ 的刻度, 如图 8.3 所示。图中有两个坐标系, 一个是 $X-Z$ 坐标系, 另一个是 $t-F(t)$ 坐标系。用 $t-F(t)$ 坐标系时, 对数正态分布函数的图形上任意一点的坐标是 $(t, F(t)) = (t, \Phi(Z))$, 根据两个轴刻度的对应关系, 用 $X-Z$ 坐标系, 这一点的坐标又为 $(\lg t, Z) = (X, Z)$, X, Z 满足关系式 $Z = (X - \mu)/\sigma$, 在 $X-Z$ 坐标系中呈一条直线。因此对数正态分布的分布函数 $F(t)$ 在 $X-Z$ 坐标中的图形是一条直线。根据以上道理, 作成一种特殊的坐标纸, 纵轴用 $\Phi(Z)$ 的刻度, 横轴用对数刻度 $\lg t$, 即得对数正态概率纸。

当已知一批观测数据 $\{(t_{(i)}, F_n(t_{(i)})) : i=1, 2, \dots, n\}$ 时, 可以直接在概率纸上描点, 视其分布情况连成相近的直线, 做法同 8.1.4 小节中所述。

由 $Z=0$, 得

$$\hat{\mu} = \lg t_{0.5} \quad (8.13)$$

由 $Z=\pm 1$, 得

$$\hat{\sigma} = \hat{\mu} - \lg t_{0.159} \quad \text{或} \quad \hat{\sigma} = \lg t_{0.841} - \hat{\mu} \quad (8.14)$$

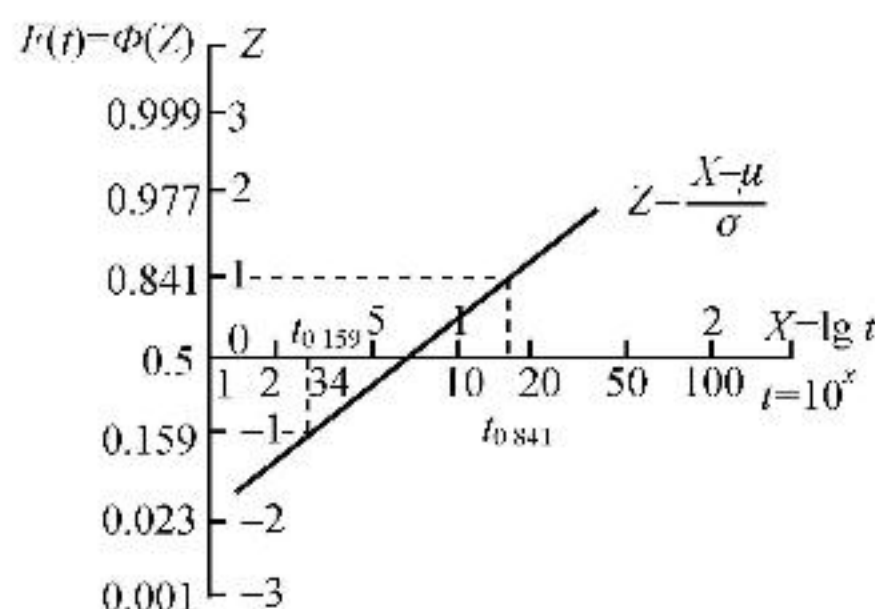


图 8.3 对数正态概率纸的构成和参数估计

由此得到图估参数的具体做法是: 过 $F(t)=50\%$ 的点右引水平线与所配直线相交, 过交点下引垂线与 t 轴相交, 其垂足取对数就是对数均值的估计值 $\hat{\mu}$ 。另外, 过 $F(t)=15.9\%$ 或 $F(t)=84.1\%$ 的点右引水平线与所配直线相交, 过交点下引垂线与 t 轴相交, 其垂足刻度对数与 $\hat{\mu}$ 的差值 $\hat{\mu} - \lg t_{0.159}$ 或 $\lg t_{0.841} - \hat{\mu}$ 就是对数标准差的估计值。

必须注意的是,这时估计出的 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 并非产品的平均寿命及标准差,而是对数均值和对数标准差。若求产品的平均寿命 θ 和寿命方差 σ'^2 ,则须按式(5.39)和式(5.40)计算,即

$$\hat{\theta} = 10^{\hat{\mu} + 1.151\hat{\sigma}^2} \quad \text{与} \quad \hat{\sigma}'^2 = \hat{\theta}^2 (10^{2.303\hat{\sigma}^2} - 1) \quad (8.15)$$

若以 $t(R^*)$ 表示可靠度为 R^* 时的可靠寿命,可用估计值 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 估计产品的可靠寿命,代入式(5.41),即得

$$\hat{t}(R^*) = 10^{\hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot u_{1-R^*}} \quad (8.16)$$

或直接在图上估计 $\hat{t}(R^*)$,从 $F(t)$ 尺的 $1-R^*$ 处向右引水平线和所配直线相交,由交点下引垂线,与横轴的交点即为 $\hat{t}(R^*)$ 值。

8.2 参数的区间估计

8.2.1 正态分布的参数区间估计

1. σ 已知时, μ 的区间估计

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态母体 $N(\mu, \sigma_0^2)$ 的一个样本,其中 σ_0 已知。求 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的区间估计。

易知 μ 的极大似然估计为样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 其分布为 $N(\mu, \sigma_0^2/n)$, 于是

$$u = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (8.17)$$

对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 有

$$P\left(u_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

然后利用不等式变形,可得

$$P(\bar{X} + u_{\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n}) = 1 - \alpha$$

因此, μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu}_L &= \bar{X} + u_{\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n} \\ \hat{\mu}_U &= \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \sigma_0 / \sqrt{n} \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

例 8.6 某车间生产滚珠,从长期实践知道,滚珠直径 X 是服从正态分布 $N(\mu, 0.05)$ 的随机变量。从某天的产品中随机抽取 6 个,测得其直径(单位:mm)如下:14.9, 15.1, 14.9, 14.8, 15.2, 15.1。计算在 0.95 置信水平下 μ 的置信区间。

解: 根据置信水平 0.95, 可得 $u_{\alpha/2} = -1.96$, $u_{1-\alpha/2} = 1.96$, 而 $\bar{X} = 15$ mm。于是

$$\hat{\mu}_L = \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.05}{6}} = 15 - 0.18 = 14.82$$

$$\hat{\mu}_U = \bar{X} + u_{1-\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.05}{6}} = 15 + 0.18 = 15.18$$

所以在置信水平 0.95 时, μ 的置信区间为 $[14.82, 15.18]$ 。

2. μ 已知时, σ^2 的置信区间

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态母体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的一个样本, 其中 μ_0 已知, 求 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间。

首先, 从假设易得 $\frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, 1), i=1, 2, \dots, n$, 于是, 由 χ^2 分布的定义可知

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 \sim \chi^2(n)$$

因此, 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_L^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 / \chi_{1-\alpha/2}^2(n) \\ \hat{\sigma}_U^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2 / \chi_{\alpha/2}^2(n) \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

例 8.7 为了解一台测量长度的仪器的精度, 对一根长为 30 mm 的标准金属棒进行 6 次重复测量。测得结果(单位:mm)如下: 30.1, 29.9, 29.8, 30.3, 30.2, 29.6。假如测量值服从正态分布 $N(30, \sigma^2)$ 。在置信水平 0.95 下, 求 σ^2 的置信区间。

解: $n=6$, $\sum_{i=1}^6 (X_i - 30)^2 = 0.35$ 。查表可知 $\chi_{0.975}^2(6) = 14.449\ 4$, $\chi_{0.025}^2(6) = 1.237\ 3$ 。于是得到

$$\hat{\sigma}_L^2 = \sum_{i=1}^6 (X_i - 30)^2 / \chi_{0.975}^2(6) = \frac{0.35}{14.449\ 4} = 0.024\ 2$$

$$\hat{\sigma}_U^2 = \sum_{i=1}^6 (X_i - 30)^2 / \chi_{0.025}^2(6) = \frac{0.35}{1.237\ 3} = 0.282\ 8$$

所以 σ^2 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $[0.024\ 2, 0.282\ 8]$ 。

3. μ, σ 均未知时的区间估计

设从服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的某批产品中随机抽取 n 件产品进行试验, 得到一组完全样本观测值 x_1, x_2, \dots, x_n 。由极大似然估计得到 μ, σ^2 的点估计分别为

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{与} \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (8.20)$$

容易证明, \bar{x}, s^2 分别是 μ, σ^2 的无偏估计, 但是 s 并非 σ 的无偏估计, 因此用 s 去估计 σ 应进行修偏。可以寻找修偏系数 c , 使得

$$E(s/c) = \sigma \quad (8.21)$$

当然,修偏系数 c 与样本量 n 有关,其值如表 8.4 所列。

表 8.4 修偏系数表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	0.797 9	0.886 2	0.921 3	0.940 0	0.951 5	0.959 4	0.965 0	0.969 3	0.972 7
n	15	20	25	30	40	50			
c	0.982 3	0.986 8	0.989 6	0.991 4	0.993 6	0.994 9			

由表 8.4 可见,当 n 较小时(特别是 $n \leq 10$),直接用 s 去估计 σ ,估计值偏小,只有当 n 足够大(如 $n \geq 20$)时,这种差别才可以忽略。因此建议,当 $n \leq 20$ 时,用 s 的修正值 $\hat{\sigma}^*$ 去估计 σ ,即

$$\hat{\sigma}^* = s/c \quad (8.22)$$

由于 $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$,因此,在 $1-\alpha$ 的置信水平下, σ^2 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_L^2 &= \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \\ \sigma_U^2 &= \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

由于 $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} \sim t_{n-1}$,因此,在 $1-\alpha$ 的置信水平下, μ 的置信区间为

$$\left. \begin{aligned} \mu_L &= \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \\ \mu_U &= \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

例 8.8 设某型导弹试射 8 发,测得落点的纵向偏差(单位:km)依次为 +0.380, +0.404, +0.302, -0.203, +0.450, -0.370, +0.580, +0.602。经检验该批数据符合正态分布。试求落点纵向偏差的均值(系统误差)、标准差(偶然误差)的点估计与区间估计,置信度均取 0.8。

解: 计算 $\bar{x}, s, \hat{\sigma}^*$ 。

由式(8.20)得

$$\bar{x} = +0.268 1, \quad s = 0.359 2$$

由式(8.22)得

$$\hat{\sigma}^* = \frac{1}{0.965 0} \times 0.359 2 = 0.372 2$$

由式(8.24)计算 μ 的置信度为 0.8 的置信区间为

$$\mu_L = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{8}} t_{0.1}(7) = \left(0.2681 - \frac{1.415}{\sqrt{8}} \times 0.3592 \right) \text{ km} = 0.0884 \text{ km}$$

$$\mu_U = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{8}} t_{0.9}(7) = 0.2681 + \frac{1.415}{\sqrt{8}} \times 0.3592 \text{ km} = 0.4480 \text{ km}$$

由式(8.23)计算 σ 的置信度为 0.8 的置信区间为

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{7s^2}{\chi_{0.9}^2(7)}} = \left(\sqrt{\frac{7}{12.017}} \times 0.3592 \right) \text{ km} = 0.2742 \text{ km}$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{7s^2}{\chi_{0.1}^2(7)}} = \left(\sqrt{\frac{7}{2.833}} \times 0.3592 \right) \text{ km} = 0.5645 \text{ km}$$

8.2.2 对数正态分布的参数区间估计

设某产品寿命服从参数为 (μ, σ) 的对数正态分布; 现从该批产品中随机抽取 n 件进行试验, 试验到全部产品失效, 得到寿命完全样本 t_1, t_2, \dots, t_n ; 对每个观测值 t_i 作变换, $x_i = \lg t_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), 可得 X 的样本 x_1, x_2, \dots, x_n 。

由对数正态分布的性质可知, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 因此参数 μ, σ^2 可利用下述公式估计, 即

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg t_i \quad (8.25)$$

与

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\lg t_i - \bar{x})^2 \quad (8.26)$$

给定置信度 $1-\alpha$, 对数均值 μ 和对数标准差 σ 的区间估计可由正态参数的区间估计公式计算。对数正态分布可靠度的置信区间, 亦可经对数变换后, 再利用正态分布可靠度置信区间的计算方法求得。下面通过例题说明其计算步骤。

例 8.9 已知某机器寿命服从对数正态分布。现取 6 台机器进行寿命试验, 测得寿命试验时间(单位:h)分别为 563, 102.3, 69 180, 1 738, 3 800, 16 220。求寿命对数均值、对数方差的点估计和区间估计($1-\alpha=0.8$)。

解: 对样本作变换, 令 $x_i = \lg t_i$ ($i=1, 2, \dots, 6$) 得 X 的样本数据: 2.751, 2.010, 4.840, 3.240, 3.58, 4.21。由式(8.25)和式(8.26)分别得到

$$\bar{x} = 3.4385, \quad s^2 = 1.0132^2 = 1.02657$$

由式(8.24)得到 μ 的置信度为 0.8 的置信区间为

$$\mu_L = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.1}(5) = 3.4385 - \frac{1.476 \times 1.0132}{\sqrt{6}} = 2.828$$

$$\mu_U = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.9}(5) = 3.4385 + \frac{1.476 \times 1.0132}{\sqrt{6}} = 4.049$$

由式(8.23)计算 σ^2 的置信度为 0.8 的置信区间为

$$\sigma_L^2 = \frac{5s^2}{\chi_{0.9}^2(5)} = \frac{5 \times 1.013 \ 2^2}{9.236} = 0.745 \ 5^2 = 0.555 \ 77$$

$$\sigma_U^2 = \frac{5s^2}{\chi_{0.1}^2(5)} = \frac{5 \times 1.013 \ 2^2}{1.610} = 1.785 \ 5^2 = 3.188 \ 04$$

习 题

8.1 某产品寿命服从对数正态分布,随机抽取 30 个样品投入试验,观测到 9 个失效产品的失效时间(单位:h)为 207.18,468.25,481.76,829.98,1 176.57,1 256.09,1 624.83,1 687.43,1 744.88。试计算分布参数 μ 和 σ 的极大似然估计,并估计产品的平均寿命及其方差。

8.2 用习题 8.1 的 30 个样品中的 9 个失效时间,用最小二乘法估计参数 μ 和 σ 的值,并给出可靠度为 0.9 时产品的可靠寿命。

8.3 某产品寿命服从对数正态分布,从中抽取 7 只进行截尾试验,截尾数为 5,失效时间(单位:h)为 200,325,556,710,1 350。试分别用 BLUE 和 BLIE 估计参数 μ 和 σ 的值。

8.4 某产品寿命服从对数正态分布,从中抽取 16 只进行定数截尾试验,至第 8 个失效时间停止,失效时间(单位:h)为 15,21,38,54,59,96,120,127。试分别用 GLUE 和 GLIE 估计参数 μ 和 σ 的值。

8.5 某产品失效分布为正态分布,今抽取 10 个样品进行寿命试验,得其失效时间(单位:h)如下:2.0,2.21,1.89,2.91,2.97,3.03,3.04,3.40,3.46,3.92。求产品的平均寿命及其方差在置信水平为 90 %时的区间估计。

8.6 某厂生产的产品,抽取 19 个进行寿命试验,其寿命值(单位:h)分别为 1 015,1 072,1 100,1 123,1 145,1 170,1 175,1 190,1 196,1 205,1 212,1 220,1 238,1 245,1 260,1 269,1 277,1 290,1 360。假定其寿命服从正态分布,利用图估计方法,给出正态分布参数 μ 和 σ 的值。

第9章 分布的拟合优度检验

分布的检验是通过试验或现场使用等得到的产品统计数据,推断产品寿命是否服从初步整理分析所选定的分布,推断的依据是拟合优度检验。拟合优度是观测数据的分布与选定的理论分布之间符合程度的度量。

从总体中抽取一个样本,根据第4章介绍的直方图等初步整理分析,初步判断样本数据服从某一分布。当然,样本的反映与假设的分布是有差异的。差异来自两个方面:一是分布假设不正确,假设的分布不是总体的分布;二是抽样的随机性所带来的抽样误差,称为随机误差。如果样本的偏差明显大于随机误差,则说明存在分布假设误差,分布假设不正确;反之,如果样本的偏差与随机误差相差不大,则说明分布假设正确,可按照假设的分布进行数据分析和处理。基于这一思想,在分布假设正确(原假设)的条件下,研究作为随机变量的偏差 D 的分布。根据样本计算偏差 D 的实现值 d ,再由 D 的分布与显著性水平 α (α 是一个小概率)计算一个界限 d_α ,其中 d_α 由 $P\{D \geq d_\alpha\} = \alpha$ 计算,然后以“小概率事件在一次试验当中几乎不可能发生”的原则进行判决。具体而言,如果 $D \geq d_\alpha$,则偏差落入大于临界值的范围,发生了小概率事件,则拒绝原来的假设,认为选定的分布与总体分布之间差异较大。所以当由样本计算的偏差 D 的实现值 d 大于 d_α 时,拒绝原假设,否则不拒绝原假设。

根据上述思想,拟合优度检验的一般步骤如下:

- ① 建立原假设 H_0 :总体分布函数 $F(x) = F_0(x)$;
- ② 构造一个反映总体分布与由样本所获得的分布之间偏差的统计量 D ;
- ③ 根据样本观测值计算出统计量 D 的观测值 d ;
- ④ 规定检验水平 α (一般为0.10,0.05,0.01等),相应求得 D 的临界值 d_0 ,使

$$P\{D \geq d_0\} = \alpha$$

- ⑤ 比较 d 和 d_0 的大小,当 $d > d_0$ 时,拒绝假设 H_0 ,即原假设的分布函数 $F_0(x)$ 不成立;当 $d \leq d_0$ 时,不拒绝假设 H_0 。

本章首先介绍两种通用的拟合优度检验,即皮尔逊 χ^2 检验和柯尔莫哥洛夫检验;然后介绍针对指数分布、威布尔分布与正态分布等具体分布的特殊检验方法;最后介绍分布的似然比检验,以便当有多种分布均通过分布检验时,从中选择最合适的分布进行数据分析。

9.1 皮尔逊 χ^2 检验

设总体 X 的分布函数为 $F(x)$,根据来自该总体的样本检验原假设

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

为寻找检验统计量,首先把总体 X 的取值范围分成 k 个区间 $(a_0, a_1], (a_1, a_2], \dots, (a_{k-1}, a_k)$, 要求 a_i 是分布函数 $F_0(x)$ 的连续点, a_0 可以取 $-\infty$, a_k 可以取 $+\infty$, 记

$$p_i = F_0(a_i) - F_0(a_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

则 p_i 代表变量 X 落入第 i 个区间的概率(要求 $p_i > 0$)。如果样本量为 n , 则 np_i 是随机变量 X 落入 $(a_{i-1}, a_i]$ 的理论频数, 如 n 个观测值中落入 $(a_{i-1}, a_i]$ 的实际频数为 n_i , 则当 H_0 成立时, $(n_i - np_i)^2$ 应是较小的值。因而可以用这些量的和来检验 H_0 是否成立。皮尔逊证明了, 在 H_0 成立时, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 统计量

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (9.1)$$

的极限分布是自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布。因此, χ^2 可以作为检验统计量。对于给定的显著性水平 α , 由 $P(\chi^2 > c | H_0) = \alpha$, 可知临界值 $c = \chi^2_{\alpha}(k-1)$, 而 $\chi^2_{\alpha}(v)$ 指自由度为 v 的 χ^2 分布的 α 分位数。

由样本观测值可计算检验统计量 χ^2 的观测值, 若观测值大于临界值 $\chi^2_{\alpha}(k-1)$, 则拒绝原假设 H_0 。但在大多数情况下, 要检验的母体分布 $F_0(x; \theta)$ 中的 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ 是 m 维未知参数。这种情况下, 为计算统计量 χ^2 中的 p_i , 用 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}$ 代替 θ , 即

$$\hat{p}_i = F_0(a_i; \hat{\theta}) - F_0(a_{i-1}; \hat{\theta}), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

此时检验统计量为

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \quad (9.2)$$

Fisher 证明了当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 该统计量的极限分布是自由度为 $k-m-1$ 的 χ^2 分布, 因而对于给定的显著性水平 α , 同样可由 χ^2 分布分位点求出临界值 $c = \chi^2_{\alpha}(k-m-1)$ 。当 $\hat{\chi}^2$ 的观测值大于临界值 $\chi^2_{\alpha}(k-m-1)$ 时, 拒绝原假设。

例 9.1 将 250 个元件进行加速寿命试验, 每隔 100 h 检验一次, 记下失效产品个数, 直到全部失效为止。不同时间内失效产品个数列于表 9.1。试问这批产品寿命是否服从指数分布 $F_0(t) = 1 - e^{-t/300}$ 。

表 9.1 某元件加速寿命试验数据表

时间区间/h	失效数	时间区间/h	失效数
0~100	39	500~600	22
100~200	58	600~700	12
200~300	47	700~800	6
300~400	33	800~900	6
400~500	25	900~1000	2

解：由于假设没有给出产品寿命的均值 θ ，而仅说它服从指数分布，因此需要先求出它的极大似然估计

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{10} n_i \bar{t}_i = \\ &= \frac{1}{250} (50 \times 39 + 150 \times 58 + \cdots + 950 \times 2) \text{ h} = 300 \text{ h}\end{aligned}$$

其中， \bar{t}_i 取组中值，即每一组数据的中点。下面的检验是对原假设

$$H_0:F(t)=F_0(t)=1-\mathrm{e}^{-t/300}$$

进行的。为使用 χ^2 检验法，首先对数据进行分组。一般组数在 7~20 个为宜，每组中观测值个数最好不少于 5 个。在这个例子中可按测试区间分组，而把最后两组合并成一组，然后分别计算

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= F_0(100) = 1 - \mathrm{e}^{-100/300} = 0.283\ 5 \\ \hat{p}_2 &= F_0(200) - F_0(100) = 1 - \mathrm{e}^{-200/300} - (1 - \mathrm{e}^{-100/300}) = 0.203\ 1\end{aligned}$$

同理可计算 $\hat{p}_3, \cdots, \hat{p}_9$ ，结果列于表 9.2 的第三列。最后计算统计量 $\hat{\chi}^2$ 的观测值为

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 33.74$$

取显著性水平 $\alpha=0.01$ ，可查得临界值为 $\chi^2_{0.01}(9-1-1)=\chi^2_{0.01}(7)=18.48$ 。由于 $\hat{\chi}^2>\chi^2_{0.01}(7)$ ，所以拒绝原假设，即不能认为这批产品的寿命服从指数分布 $F_0(t)=1-\mathrm{e}^{-t/300}$ 。

表 9.2 拟合优度检验的计算一

组 号	n_i	\hat{p}_i	$n\hat{p}_i$	$n_i - n\hat{p}_i$	$(n_i - n\hat{p}_i)^2$	$\frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}$
1	39	0.283 5	70.88	-31.88	1 016.02	14.33
2	58	0.203 1	50.78	-7.23	52.20	1.03
3	47	0.145 5	36.38	-10.63	112.89	3.10
4	33	0.104 3	26.08	-6.93	47.96	1.84
5	25	0.074 7	18.68	-6.33	40.01	2.14
6	22	0.053 6	13.40	-8.6	73.96	5.52
7	12	0.038 3	9.58	-2.43	5.88	0.61
8	6	0.027 5	6.88	0.88	0.77	0.11
9	8	0.069 5	17.37	9.37	87.81	5.06

前面讲过第 i 个区间(或区组)内样本的失效概率为 p_i 。对于完全样本, np_i 为每一区组的理论失效数,但对于不完全样本中不规则截尾的情形,样品在第 i 区组的失效概率为

$$p_i = 1 - \frac{R(t_i)}{R(t_{i-1})} \tag{9.3}$$

此时第 i 区组的理论失效数为 $n_{i-1}p_i$,其中 n_{i-1} 为进入第 i 区组的残存样品数。

例 9.2 在现场统计了 100 台某设备的故障数据如表 9.3 所列。现初步假设其寿命分布为正态分布,并估计得到其参数 $\mu=4\,300\text{ h}$, $\sigma=1\,080\text{ h}$,试用 χ^2 检验判断其假设的正确性($\alpha=0.1$)。

表 9.3 设备故障数据表

时间区段/h	失效数	删除数	时间区段/h	失效数	删除数
1 800~2 600	7	0	4 100~4 400	11	6
2 600~3 100	6	1	4 400~4 600	9	5
3 100~3 500	8	1	4 600~4 800	7	1
3 500~3 900	8	5	4 800~5 300	7	3
3 900~4 100	6	2	5 300~6 500	6	1

解：原假设 H_0 :设备寿命服从参数 $\mu=4\,300\text{ h}$, $\sigma=1\,080\text{ h}$ 的正态分布。用 χ^2 检验判断假设正确与否,计算结果如表 9.4 所列,其中 $\chi^2=5.571\,1$,显著性水平 $\alpha=0.1$ 。由于自由度 $k-1-m=10-1-2=7$, $\alpha=0.1$,查 χ^2 分布表,得 $\chi^2_{0.1}(7)=12.017>5.571\,1=\chi^2$,所以不拒绝 H_0 ,认为该设备寿命服从正态分布 $N(4\,300, 1\,080^2)$ 。

表 9.4 拟合优度检验的计算二

$t_{i-1} \sim t_i$ 时间区段/h	失效数 r_i	删除数 Δk_i	n_{i-1}	理论值 $R(t_i)$	p_i	$n_{i-1}p_i$	$(r_i - n_{i-1}p_i)^2$	$\frac{(r_i - n_{i-1}p_i)^2}{n_{i-1}p_i}$
1 800~2 600	7	0	100	0.941 8	0.005 82	5.82	1.39	0.239
2 600~3 100	6	1	93	0.866 5	0.079 95	7.435	2.059	0.277
3 100~3 500	8	1	86	0.770 3	0.111 0	9.546	2.39	0.25
3 500~3 900	8	5	77	0.644 3	0.163 6	12.597	21.13	1.68
3 900~4 100	6	2	64	0.573 4	0.110 0	7.04	1.082	0.154
4 100~4 400	11	6	56	0.462 9	0.192 7	10.79	0.044 1	0.004 1
4 400~4 600	9	5	39	0.390 5	0.156 4	6.1	8.41	1.38
4 600~4 800	7	1	25	0.321 7	0.1762	4.4	6.76	1.53
4 800~5 300	7	3	17	0.177 3	0.448 9	7.63	0.397	0.052
5 300~6 500	6	1	7	0.020 7	0.883 4	6.18	0.032 4	0.005

皮尔逊 χ^2 检验方法使用范围很广: 不管母体是离散型随机变量, 还是连续型随机变量; 母体分布的参数可以已知, 也可以未知; 可以用于完全样本, 也可以用于截尾样本和分组数据。

9.2 柯尔莫哥洛夫检验

9.2.1 完全样本情形的柯尔莫哥洛夫检验

设总体的分布为 $F(x)$, $F_0(x)$ 为一完全确定的连续型分布函数, 考虑假设检验问题

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

从总体中抽取容量为 n 的样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 其顺序统计量为

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

可以得到其经验分布函数

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq X_{(1)} \\ i/n, & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \\ 1, & x \geq X_{(n)} \end{cases} \quad (9.4)$$

柯尔莫哥洛夫提出检验假设的统计量为

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x)| \quad (9.5)$$

当假设 H_0 成立时, 对于给定的 n 可以得到 D_n 的精确分布和 $n \rightarrow \infty$ 时的极限分布。

在计算统计量 D_n 时, 先求出

$$\delta_i = \max\{|F_0(x_{(i)}) - (i-1)/n|, |F_0(x_{(i)}) - i/n|\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.6)$$

然后在 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ 中选择最大的一个便是 D_n , 即

$$D_n = \max_i \{\delta_i\} \quad (9.7)$$

对于给定的显著性水平 α 和样本量 n , 可查附表 B.9(a) 得到临界值 $d_{n,\alpha}$ 。当

$$D_n \leq d_{n,\alpha} \quad (9.8)$$

时, 不拒绝假设 H_0 , 否则拒绝假设 H_0 。

例 9.3 从某厂生产的电容中, 抽取 20 只, 测得它们的绝缘电阻值, 并按从小到大的顺序列于表 9.5 第一列和第六列中。试检验其是否服从均值 $\mu = 30$ 、方差 $\sigma^2 = 100$ 的正态分布, 其中显著性水平 α 是否等于 0.05。

解: 用柯尔莫哥洛夫检验, 首先假设 $F_0(x)$ 为 $N(30, 10^2)$, $F(x)$ 为电容绝缘电阻的分布函数。要检验假设

$$H_0: F(x) = F_0(x)$$

为计算 $F_0(x)$, 利用标准正态分布表, 即

$$F_0(x) = \Phi[(x - \mu)/\sigma] = \Phi[(x - 30)/10]$$

其中, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。将 $F_0(x)$ 的结果列于表 9.5 的第二列和第七列中。

表 9.5 柯尔莫哥洛夫检验的计算

x_i	$F_0(x_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i	x_i	$F_0(x_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i
15	0.067	0	0.050	0.067	39	0.815	0.500	0.550	0.315
19	0.136	0.050	0.100	0.086	40	0.841	0.550	0.600	0.291
21	0.185	0.100	0.150	0.085	42	0.884	0.600	0.650	0.284
23	0.242	0.150	0.200	0.092	43	0.903	0.650	0.700	0.253
26	0.345	0.200	0.250	0.145	45	0.933	0.700	0.750	0.233
29	0.461	0.250	0.300	0.211	48	0.964	0.750	0.800	0.214
30	0.500	0.300	0.350	0.200	49	0.971	0.800	0.850	0.171
32	0.579	0.350	0.400	0.229	53	0.989	0.850	0.900	0.139
34	0.655	0.400	0.450	0.255	58	0.997	0.900	0.950	0.097
37	0.758	0.450	0.500	0.308	67	0.999	0.950	1.000	0.049

从表 9.5 可知

$$D_n = \max_i \{\delta_i\} = 0.315$$

由显著性水平 $\alpha=0.05$, 查附表 B. 9(a) 得到 $d_{20,0.05}=0.294$, 因为 $D_n=0.315>0.294$, 所以拒绝 H_0 , 即电容的绝缘电阻不服从正态分布 $N(30, 10^2)$ 。

9.2.2 截尾样本情形的柯尔莫哥洛夫检验

1. 定数截尾试验

设从总体中抽取 n 件产品做定数截尾寿命试验, 到有 r 个产品失效时结束, 失效时间依次为

$$t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r, \quad r \leq n \tag{9.9}$$

假设总体分布函数 $F(t)=F_0(t)$, $F_n(t)$ 是由截尾样本得到的经验分布函数, 作统计量

$$D_r = \sup_{t \leq t_r} |F_0(t) - F_n(t)| \tag{9.10}$$

对于 $n=5(5)30, r=1(1)n$, 巴尔(Barr)和戴维森(Davidson)计算了 D_r 的临界值表, 见附表 B. 9(b)。为说明表的使用, 下面给出 $n=5, r=1(1)5$ 的情况, 见表 9.6。

表 9.6 定数截尾样本统计量 D_r 的分布函数及临界值表

$\begin{matrix} k \\ r \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	0.672 32	0.922 24	0.989 76	0.999 67	0.999 99
2	0.280 00	0.871 04	0.984 96	0.999 68	1.000 00
3	0.121 60	0.787 52	0.984 96	0.999 68	1.000 00
4	0.057 60	0.729 60	0.978 24	0.999 68	1.000 00
5	0.038 40	0.691 20	0.969 92	0.999 36	1.000 00

表 9.6 给出的数值是 D_r 的分布函数 $F_{D_r}(k/n) = P(D_r \leq k/n)$ 的值。例如, $n=5, r=1$, 则 $k=1, 2$ 时, 有

$$F_{D_r}(1/5) = 0.672\ 32, \quad F_{D_r}(2/5) = 0.922\ 24$$

若取检验的临界值为 $D_{5,\alpha} = 2/5$, 则此时的显著性水平 α 为

$$\alpha = P\{D_r > 2/5\} = 1 - 0.922\ 24 = 0.077\ 76$$

所以在检验时, 对于给定的显著性水平 α 、样本量 n 和失效数 r , 可在 D_r 的分布表中找到与 $1-\alpha$ 相接近的 F_k 值, 并查得对应的 k 值, 则临界值便是 $D_{r,\alpha} = k/n$ 。

例 9.4 为了检验电子管的寿命是否服从威布尔分布

$$F_0(t) = 1 - e^{-(t/1\ 000)^2}, \quad t \geq 0$$

抽取 10 只电子管, 做定数截尾寿命试验, 到有 5 只电子管失效时截止, 测得失效时间(单位: h) 为 160, 200, 450, 680, 810。试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下进行检验。

解: 列表进行计算, 见表 9.7。根据表 9.7 可知, 由样本得到的 D_r 为

$$D_r = \max_i \{\delta_i\} = 0.160\ 8$$

取 $\alpha=0.05$, 查附表 B. 9(b) 中 $n=10$ 的表, 在 $r=5$ 这一行上, 找到与 $1-\alpha=0.95$ 最接近的数值 0.969 53, 故实际的显著性水平为 $1-0.969\ 53=0.031\ 47$ 。对应于 0.969 53 这个数所在的列为 $k=4$, 则临界值 $D_{10,5,\alpha} = 4/10 = 0.4$ 。

因为 $D_r = 0.160\ 8 < 0.4 = D_{10,5,\alpha}$, 所以不拒绝原假设, 认为电子管的寿命服从威布尔分布 $F_0(t)$ 。

表 9.7 电子管寿命分布检验的计算

t_i/h	$F_0(t_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i
160	0.025 3	0	0.100 0	0.074 3
200	0.039 2	0.100 0	0.200 0	0.160 8
450	0.183 3	0.200 0	0.300 0	0.116 7
680	0.370 2	0.300 0	0.400 0	0.070 2
810	0.481 1	0.400 0	0.500 0	0.081 1

2. 定时截尾试验

对于定时截尾寿命试验,截尾时间为 t_0 , 检验分布 $F_0(t)$ 的统计量 D_0 为

$$D_0 = \sup_{t \leq t_0} |F_0(t) - F_n(t)| \tag{9.11}$$

在寿命试验中,假如抽取样品数为 n ,当假设

$$H_0: F(t) = F_0(t)$$

为真时,从理论上说,到截尾时间 t_0 , 应该有 $nF_0(t_0)$ 个产品失效,记

$$R_c = nF_0(t_0) \tag{9.12}$$

R_c 称为理论截尾数或截尾点。利用理论截尾数可将定时截尾试验转化为定数截尾情形,从而求出 D_0 的分布函数。对 $n=5(5)10, R_c=1(1)n, D_0$ 的分布函数值见附表 B. 9(c)。使用方法与定数截尾相同,表中给出 D_0 的分布函数值的形式为

$$F_0(k/n) = P(D_0 \leq k/n) = F_{0k}$$

如果取临界值 $d_{0,\alpha} = k/n$, 则相应的显著性水平为 $\alpha = 1 - F_{0k}$ 。

例 9.5 用 20 个产品进行寿命试验,试验到 $t_0 = 2.2$ h 截止,共有 6 个产品失效,失效时间(单位:h)分别为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.4。试检验产品寿命是否服从指数分布 $F_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{10}}$ 。

解: 要检验假设 $H_0: F(t) = F_0(t)$, 先计算在 H_0 成立时的理论失效数

$$R_c = nF_0(t_0) = 20 \times 0.2 = 4$$

其中, $F_0(t_0) = 1 - e^{-\frac{2.2}{10}} = 0.1975 \approx 0.2$ 。

若取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 由附表 B. 9(c) 中 $n = 20$ 的表, 在 $R_c = 4$ 的那一行上, 找到与 $1 - \alpha = 0.95$ 最接近的数值为 0.945 14 (故实际的 $\alpha \approx 0.055$), 而该值所在的列为 $k = 4$, 则临界值为

$$d_{0,\alpha} = \frac{k}{n} = \frac{4}{20} = 0.2$$

根据试验数据计算 D_0 的值, 见表 9.8。

表 9.8 某产品寿命分布检验的计算

t_i/h	$F_0(t_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i	t_i/h	$F_0(t_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i
0.1	0.010	0	0.05	0.04	1.0	0.096	0.20	0.25	0.154
0.2	0.020	0.05	0.10	0.08	1.4	0.131	0.25	0.30	0.169
0.3	0.029	0.10	0.15	0.121	2.2	0.198	0.30		0.102
0.4	0.038	0.15	0.20	0.162					

$$D_0 = \max_i \{\delta_i\} = 0.169$$

因为 $D_0 = 0.169 < 0.20 = d_{0,\alpha}$, 所以不拒绝假设 H_0 , 认为产品寿命服从指数分布。

3. 大样本情形

对于大样本情形 ($n > 30$), 考虑统计量

$$D_{n,t_s} = \sup_{t \leq t_s} |F_0(t) - F_n(t)| \quad (9.13)$$

其中, t_s 为试验截止时间。若试验为定时截尾, 则 $t_s = t_0$; 若试验为定数截尾, 则 $t_s = t_r$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 可以求得 $\sqrt{n}D_{n,t_s}$ 的极限分布, 该分布的分位数如附表 B.9(d) 所列。为便于使用, 表 9.9 给出了一些常用的数值。利用表 9.9 之前, 应先计算出 $F_0(t_s)$, 在表的第一行找到与 $F_0(t_s)$ 最接近的数值后, 再在第一列找到 $1 - \alpha$ (α 为显著性水平), 表中对应于 $1 - \alpha$, $F_0(t_s)$ 的数值便是 $\sqrt{n}D_{n,t_s}$ 的极限分布的临界值。

表 9.9 $\sqrt{n}D_{n,t_s}$ 的极限分布表 $\lim_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n}D_{n,t_s} < d] = G(d)$

$G(d)$	$F_0(t_s)$									
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.75	0.471 4	0.646 5	0.766 3	0.854 4	0.919 6	0.966 6	0.997 6	1.014 2	1.019 0	1.019 2
0.80	0.054 5	0.690 5	0.816 8	0.908 5	1.022 9	1.022 9	1.053 3	1.068 7	1.072 7	1.072 7
0.85	0.544 9	0.744 3	0.878 4	0.974 6	1.091 4	1.091 4	1.120 8	1.134 8	1.137 9	1.137 9
0.90	0.598 5	0.815 5	0.959 7	1.061 6	1.181 3	1.181 3	1.209 4	1.221 6	1.223 8	1.223 8
0.95	0.682 5	0.926 8	1.086 8	1.197 5	1.321 1	1.321 1	1.347 1	1.356 8	1.358 1	1.358 1
0.99	0.851 2	1.150 5	1.341 9	1.469 6	1.599 6	1.599 6	1.621 4	1.627 2	1.627 6	1.627 6
0.999	1.052 3	1.417 1	1.645 6	1.791 3	1.929 2	1.929 2	1.946 4	1.949 4	1.949 5	1.949 5

例 9.6 抽取 47 台电视机, 进行 196 h 无替换寿命试验, 发现有 15 台失效, 失效时间列于表 9.10 中。试检验该种电视机的寿命分布是否服从指数分布 $F_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{3\,000}}$ 。

解: 检验假设

$$H_0: F(t) = F_0(t)$$

列表计算 D_{n,t_s} , 表中最后一个时间为 $t_s = 196$ h。

$$D_{n,t_s} = \max_i \{\delta_i\} = 0.261\,5$$

$$\sqrt{n}D_{n,t_s} = \sqrt{47} \times 0.261\,5 = 1.792\,8$$

表 9.10 电视机寿命分布检验的计算

t_i/h	$F_0(t_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i	t_i/h	$F_0(t_i)$	$\frac{i-1}{n}$	$\frac{i}{n}$	δ_i
5.5	0.001 8	0	0.021 3	0.019 5	48	0.015 9	0.170 2	0.191 5	0.175 6
8.5	0.002 8	0.021 3	0.042 6	0.039 8	67.5	0.022 2	0.191 5	0.212 8	0.190 6
11	0.003 7	0.042 6	0.063 8	0.060 1	70	0.023 1	0.212 8	0.234 0	0.2109
15	0.005 0	0.063 8	0.085 1	0.080 1	95	0.031 2	0.234 0	0.255 3	0.224 1
25	0.008 3	0.085 1	0.106 4	0.098 1	109	0.035 7	0.255 3	0.276 6	0.240 9
32	0.010 6	0.106 4	0.127 7	0.111 7	116	0.037 9	0.276 6	0.297 9	0.260 0
44	0.014 6	0.127 7	0.148 9	0.134 3	178	0.057 6	0.297 9	0.319 1	0.261 5
45	0.014 9	0.148 9	0.170 2	0.155 3	196	0.063 2	0.319 1		0.255 9

计算 $\sqrt{n}D_{n,t_s}(\alpha)$ 的值, $t_s=196\text{ h}$,得

$$F_0(t_s)=F_0(196)=1-\mathrm{e}^{-\frac{196}{3\,000}}=0.319\,1$$

取 $\alpha=0.001$,由附表 B. 9(d)查得,当 $1-\alpha=0.999,F_0(t_s)=0.319\,1$ 时,临界值

$$\sqrt{n}D_{n,t_s}(\alpha)=1.645\,6$$

显然 $\sqrt{n}D_{n,t_s}>\sqrt{n}D_{n,t_s}(\alpha)$,拒绝 H_0 ,即电视机寿命不服从均值为 $3\,000\text{ h}$ 的指数分布。

9.3 指数分布检验

当产品寿命服从指数分布时,其失效率 $\lambda(t)$ 是一个常数。因此检验产品的寿命是否服从指数分布,只要检验 $\lambda(t)$ 是不是常数即可。其检验的原假设为 $H_0:\lambda(t)=\text{常数}$,而备择假设为 $H_1:\lambda(t)\neq\text{常数}$,或为非降函数,或为非增函数。

如果通过检验,接受 $H_0:\lambda(t)=\text{常数}$,那么,具有常数失效率的寿命服从指数分布;如果 H_0 被否定,那么,其寿命不服从指数分布。下面介绍检验 H_0 的两种方法,这两种检验方法,对寿命试验的要求相同,从被判断的某批产品中,随机地抽取 n 件产品(n 不要太小),同时投入进行定数截尾试验,可以是有替换的,也可以是无替换的。若 r 次失效,其失效时间依次为 $t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(r)}$,记

$$Y_i=\begin{cases}(n-i+1)(t_{(i)}-t_{(i-1)}) & \text{(若是无替换的)} \\ n(t_{(i)}-t_{(i-1)}) & \text{(若是有替换的)}\end{cases}\tag{9.14}$$

其中, $t_{(0)}=0$ 。如果 $H_0:\lambda(t)=\lambda$ 成立,则

$$2\lambda Y_i\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\chi^2(2),\quad i=1,2,\cdots,r\tag{9.15}$$

9.3.1 F 检验法

在 $H_0: \lambda(t) = \lambda$ (某常数) 成立的条件下, 由式(9.15)和 χ^2 分布的可加性, 得到

$$\varphi = \left(\frac{1}{2r_1} \sum_{i=1}^{r_1} Y_i \right) / \left(\frac{1}{2r_2} \sum_{i=r_1+1}^r Y_i \right) \sim F(2r_1, 2r_2) \quad (9.16)$$

其中, $r_1 + r_2 = r$, 而 $Y_i (i=1, 2, \dots, r)$ 由式(9.14)给出。如果 φ 的分子部分大于分母部分, 即

$$\frac{1}{2r_1} \sum_{i=1}^{r_1} Y_i > \frac{1}{2r_2} \sum_{i=r_1+1}^r Y_i \quad (9.17)$$

且

$$\varphi > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r_1, 2r_2) \quad (9.18)$$

则拒绝 H_0 的假设, 那么 $\lambda(t)$ 是非增函数; 如果 φ 的分母部分大于分子部分, 即

$$\frac{1}{2r_2} \sum_{i=r_1+1}^r Y_i > \frac{1}{2r_1} \sum_{i=1}^{r_1} Y_i \quad (9.19)$$

且

$$1/\varphi > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r_2, 2r_1) \quad (9.20)$$

则拒绝 H_0 的假设, $\lambda(t)$ 是非降函数。关于 r_1 和 r_2 , 可选择 $r_1 = r_2$, 相应的 $r = 2r_1$ 。如果 $r = 2r_1 + 1$, 则取 $r_2 = r_1 + 1$ 。

例 9.7 从某批产品中随机抽取 100 件产品作为试样, 进行非替换的寿命试验, 得到 6 个失效时间(单位: h): 3, 10, 20, 34, 48 和 70, 试验停止。试用 F 检验法判断是否是来自指数分布类型的母体。

解: $n=100, r=6$ 试验又是无替换的, $t_{(1)}=3, t_{(2)}=10, t_{(3)}=20, t_{(4)}=34, t_{(5)}=48, t_{(6)}=70$, 由式(9.14)得, $Y_1=300, Y_2=693, Y_3=980, Y_4=1\,358, Y_5=1\,344, Y_6=2\,090$ 。令 $r_1=r_2=3$, 由式(9.16)计算

$$\varphi = \frac{300 + 693 + 980}{1\,358 + 1\,344 + 2\,090} \approx (3.5)^{-1}$$

因为 $\varphi < 1$, 所以满足式(9.19), 又 $1/\varphi = 3.5$, 如果 $\alpha = 0.10$, 查表得 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r_2, 2r_1) = F_{0.95}(6, 6) = 4.284 > 3.5 = 1/\varphi$, 则不拒绝 H_0 。但是, 如果假定 $\alpha = 0.20$, 查表得 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r_2, 2r_1) = F_{0.9}(6, 6) = 3.055 < 3.5 = 1/\varphi$, 则符合不等式(9.20), 由此拒绝 H_0 。在这种情形下, 最好再继续试验, 多得到一些失效时间数据, 判断的准确性会更高。譬如说继续试验, 总共得到 10 个失效时间, 除上述 6 个外, 还有 $t_{(7)}=108, t_{(8)}=147, t_{(9)}=204, t_{(10)}=264$ 。进一步利用式(9.14), 得到 $Y_7=3\,572, Y_8=3\,627, Y_9=5\,244$ 和 $Y_{10}=6\,000$, 取 $r_1=r_2=5$, 由此得到 $\varphi = 4\,675/20\,533 = (4.4)^{-1}$ 符合式(9.19)。再判断式(9.20)是否成立。若设 $\alpha = 0.05$, 查表得 $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2r_2, 2r_1) = F_{0.975}(10, 10) = 3.717 < 4.4 = 1/\varphi$, 不等式(9.20)成立, 则拒绝 H_0 , 并且 $\lambda(t)$ 为非降函数。

9.3.2 χ^2 检验法

对指数分布类型的判断,国际电工委员会制定的设备可靠性试验标准草案(IEC 605—6)推荐使用 χ^2 检验法。下面具体介绍该方法。

(1) 定数截尾寿命试验的情形

令

$$T(t_{(i)}) = \sum_{j=1}^i Y_j = \begin{cases} \sum_{j=1}^{i-1} t_{(j)} + (n-i+1)t_{(i)} & \text{(若是无替换的)} \\ n t_{(i)} & \text{(若是有替换的)} \end{cases} \quad (9.21)$$

其中, $Y_j (j=1, 2, \dots, r)$ 由式(9.14)计算。 $T(t_{(i)})$ 指在 $t_{(i)}$ 失效时刻前的累积总试验时间。

如果原假设 $H_0: \lambda(t) = \lambda(\text{常数})$ 成立,那么,检验函数

$$Q = -2 \sum_{i=1}^{r-1} \ln \left[\frac{T(t_{(i)})}{T(t_{(r)})} \right] \sim \chi^2(2r-2) \quad (9.22)$$

如果显著性水平为 α , 即

$$Q \geq \chi_{1-\alpha}^2(2r-2) \quad (9.23)$$

则拒绝 H_0 , 即寿命分布不是指数类型; 否则, 不拒绝 H_0 。

例 9.8 对例 9.7 的数据, 利用 χ^2 检验法判断是否是指数分布类型。

解: 按式(9.21)计算, 得

$$\begin{aligned} T(3) &= 100 \times 3 = 300, & T(10) &= 3 + 99 \times 10 = 993 \\ T(20) &= 3 + 10 + 98 \times 20 = 1\,973, & T(34) &= 3 + 10 + 20 + 97 \times 34 = 3\,331 \\ T(48) &= 3 + 10 + 20 + 34 + 96 \times 48 = 4\,675 \\ T(70) &= 3 + 10 + 20 + 34 + 48 + 95 \times 70 = 6\,765 \end{aligned}$$

由式(9.22)计算 Q 值, 得

$$\begin{aligned} Q &= -2 \times (\ln 300 + \ln 993 + \ln 1\,973 + \ln 3\,331 + \ln 4\,675 - 5 \ln 6\,765) = \\ &= -2 \times (5.703\,8 + 6.900\,7 + 7.587\,3 + 8.111\,0 + 8.450\,0 - 44.097\,6) = \\ &= 14.689\,6 \end{aligned}$$

如果 $\alpha=0.10$, 查表得 $\chi_{0.90}^2(10)=15.99$, 从而

$$Q = 14.689.6 < 15.99$$

因此, 不等式(9.23)不成立, 则不拒绝 H_0 , 即可以认为是指数分布类型。

(2) 预先确定总累积试验时间的情形

有时, 在进行寿命试验(包括有替换的或无替换的)时, 达到了预先确定的总累积试验时间 T^* 后, 则停止寿命试验。如果在达到总试验时间 T^* 之前, 已有 r 次失效, 则此时 r 是随机数。将 $t_{(i)}$ 记作从寿命试验开始起($t=0$)到发生第 i 次失效的时间。

如果原假设 $H_0: \lambda(t) = \lambda(\text{常数})$ 成立, 则检验函数

$$Q = -2 \sum_{i=1}^r \ln \left[\frac{T(t_{(i)})}{T^*} \right] \sim \chi^2(2r) \quad (9.24)$$

其中, $T(t_{(i)})$ 由式(9.21)定义。如果取显著性水平为 α , 即

$$Q \geq \chi_{1-\alpha}^2(2r) \quad (9.25)$$

则拒绝 H_0 , 即认为不是指数分布类型。

例 9.9 为了判断某批产品的寿命分布是否符合指数分布类型, 从中随机抽取 30 件产品作为试样, 进行无替换的寿命试验, 预定在总累积试验时间达到 $T^* = 9\,000$ h 停止。在完成 T^* 时间之前已有 20 件试样已失效, 其失效时间(单位: h)为 13, 23, 44, 75, 81, 83, 122, 164, 166, 182, 218, 247, 289, 334, 361, 373, 377, 426, 447, 450。若 $\alpha = 0.05$, 试用 χ^2 检验法进行判断。

解: $n = 30, r = 20, T^* = 9\,000$ h, 按式(9.21)计算

$$\begin{aligned} T(13) &= 30 \times 13 = 390 \\ T(23) &= 13 + 29 \times 23 = 680 \\ &\vdots \\ T(450) &= 13 + \cdots + 447 + 11 \times 450 = 8\,975 \end{aligned}$$

由式(9.24)计算

$$\begin{aligned} Q &= -2(\ln 390 + \ln 680 + \cdots + \ln 8\,975 - 20 \ln 9\,000) = \\ &= -2(165.149\,4 - 182.099\,6) = 33.900\,4 \end{aligned}$$

查表得 $\chi_{0.95}^2(40) = 55.76$, 因此得到 $Q = 33.900\,4 < 55.76$, 不满足不等式(9.25), 因此不拒绝 H_0 , 即可认为是指数分布类型。

9.4 威布尔分布检验

9.4.1 F 检验法

设产品的寿命分布为 $F(t)$, 要检验假设

$$H_0: F(t) = F_0(t; \eta, m) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}$$

其中, m, η 是未知参数。为检验此假设, 从产品中任意取 n 个进行寿命试验, 到有 r 个失效时试验停止, 失效时间依次为 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(r)}$ 。设 $X_{(i)} = \ln t_{(i)}, Z_{(i)} = (X_{(i)} - \mu)/\sigma, \mu = \ln \eta, \sigma = 1/m$, 则在原假设 H_0 成立下, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(r)}$ 是极值分布 $F_X(x) = 1 - \exp(-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}})$ 的前 r 个顺序统计量, $Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \cdots \leq Z_{(r)}$ 是标准极值分布 $F_Z(z) = 1 - \exp(-e^z)$ 的前 r 个顺序统计量, 且 $E(Z_{(i)}) (i=1, 2, \cdots, r)$ 可查表, Van Montfort 提出统计量

$$l_i = \frac{X_{(i+1)} - X_{(i)}}{E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})}, \quad i = 1, 2, \cdots, r-1$$

并证明了诸 l_i 渐近独立,且服从标准指数分布。取 $r_1=(r/2)$,则统计量

$$W = \frac{\sum_{i=r_1+1}^{r-1} \frac{l_i}{r-r_1-1}}{\sum_{i=1}^{r_1} \frac{l_i}{r_1}} \tag{9.26}$$

在原假设 H_0 成立的条件下,渐近服从分布 $F(2(r-r_1-1),2r_1)$,并且它的取值不能太大,也不能太小。因此,对于给定的显著性水平 α ,检验规则为

如果

$$W < F_{\alpha/2}(2(r-r_1-1),2r_1) \quad \text{或} \quad W > F_{1-\alpha/2}(2(r-r_1-1),2r_1)$$

则拒绝 H_0 ;否则,不拒绝 H_0 。

例 9.10 要检验某型号滤波器在加速应力下的寿命是否服从威布尔分布。在某个加速应力下,记录 20 个受试样品中 13 个失效样品的失效时间(记录在表 9.11 中的第二列),要求用这些数据对威布尔分布的假设作检验。

解: 为检验假设

$$H_0: F(t;m,\eta) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}, \quad t > 0$$

列表计算 l_i 的值,具体列于表 9.11 中。 $E(Z_{(i)})(i=1,2,\cdots,13)$ 的值可查表,取 $r_1=13/2=6$,根据 l_i 值,可计算 F 的观测值为

$$F = \frac{\sum_{i=7}^{12} l_i/6}{\sum_{i=1}^6 l_i/6} = \frac{3.805}{2.842} = 1.338$$

表 9.11 滤波器寿命分布检验的计算

i	$t_{(i)}$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$	$a_i = x_{(i+1)} - x_{(i)}$	$E(Z_{(i)})$	$b_i = E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})$	$l_i = \frac{a_i}{b_i}$
1	543	6.297	0.440	-3.572 9	1.025 8	0.429
2	843	6.737	0.662	-2.547 1	0.527 1	1.256
3	1 634	7.399	0.059	-2.020 0	0.361 6	0.163
4	1 734	7.458	0.056	-1.658 4	0.279 8	0.200
5	1 834	7.514	0.053	-1.378 6	0.231 5	0.229
6	1 934	7.567	0.113	-1.147 1	0.199 9	0.565
7	2 164.5	7.680	0.057	-0.947 2	0.178 1	0.320
8	2 292	7.737	0.054	-0.769 1	0.162 7	0.332
9	2 419.5	7.791	0.273	-0.606 4	0.151 6	1.801

i	$t_{(i)}$	$x_{(i)} = \ln t_{(i)}$	$a_i = x_{(i+1)} - x_{(i)}$	$E(Z_{(i)})$	$b_i = E(Z_{(i+1)}) - E(Z_{(i)})$	$l_i = \frac{a_i}{b_i}$
10	3 176.7	8.064	0.049	-0.454 8	0.143 6	0.341
11	3 338.3	8.113	0.094	-0.311 2	0.138 5	0.679
12	3 666.7	8.207	0.045	-0.172 7	0.135 6	0.332
13	3 833.4	8.252		-0.037 1		

如取显著性水平 $\alpha=0.10$, 查 F 分布表可得检验临界值

$$F_{0.95}(12,12) = 2.69$$

$$F_{0.05}(12,12) = 1/F_{0.95}(12,12) = 1/2.69 = 0.372$$

因为 $F_{0.05}(12,12) < F < F_{0.95}(12,12)$, 所以不拒绝 H_0 , 可以认为在此加速应力下, 这批滤波器寿命服从威布尔分布。

9.4.2 χ^2 检验法

沿用 9.4.1 小节的假设和符号, 若令

$$V_i = (r-i)(X_{(r-i+1)} - X_{(r-i)}), \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (9.27)$$

则 $V_i/\sigma (i=1, 2, \dots, r-1)$ 是近似相互独立, 且同时服从标准指数分布的随机变量。根据指数分布的性质, 可知 $2V_i/\sigma (i=1, 2, \dots, r-1)$ 都是近似独立, 且服从具有自由度为 2 的 χ^2 分布。由巴特例特统计量可得到

$$B^2 = 2(r-1) \lg \left[\sum_{i=1}^{r-1} V_i / (r-1) \right] - 2 \sum_{i=1}^{r-1} \lg V_i \quad (9.28)$$

$$c = 1 + \frac{r}{6(r-1)} \quad (9.29)$$

且 B^2/c 是自由度为 $r-2$ 的 χ^2 变量。

如果给定显著性水平 α , 由 χ^2 分布表可查得 $\chi_{\alpha/2}^2(r-2)$ 和 $\chi_{1-\alpha/2}^2(r-2)$, 当

$$B^2/c < \chi_{\alpha/2}^2(r-2) \quad \text{或} \quad B^2/c > \chi_{1-\alpha/2}^2(r-2)$$

时, 拒绝假设 H_0 。

例 9.11 抽取 20 个产品做寿命试验, 开始 6 个失效时间(单位:h)为 7, 12, 15, 24, 25, 48。需要检验这些数据是否来自同一双参数威布尔分布。

解: 根据截尾样本数据, 由式(9.27)计算

$$V_1 = 5(\ln 48 - \ln 25) = 5 \ln 1.92 = 3.261 5$$

类似可得, $V_2=0.156 8, V_3=1.41, V_4=0.446 2, V_5=0.536 5$ 。由式(9.28)和式(9.29)可知

$$B^2 = 2(r-1)\lg\left[\sum_{i=1}^5 V_i/(r-1)\right] - 2\sum_{i=1}^5 \lg V_i =$$

$$2 \times 5 \times \lg\left(\frac{5.811\ 0}{5}\right) - 2 \times (0.531\ 5 + 1.195\ 3 + 0.149\ 2 + 1.649\ 5 + 1.729\ 4) =$$

$$0.653\ 0 + 1.526\ 2 = 2.179\ 2$$

$$c = 1 + \frac{r}{6(r-1)} = 1 + \frac{6}{30} = 1.2$$

于是

$$\frac{B^2}{c} = \frac{2.179\ 2}{1.2} = 1.816$$

取显著性水平 $\alpha=0.1$, 由 χ^2 分布表, 查得

$$\chi_{0.05}^2(4) = 0.711 \quad \text{与} \quad \chi_{0.95}^2(4) = 9.488$$

由于 $0.711 < \frac{B^2}{c} < 9.488$, 所以认为试验数据来自同一双参数威布尔分布。

9.5 正态分布检验

正态分布的拟合优度检验, 除了皮尔逊 χ^2 检验、柯尔莫哥洛夫检验以外, 专门针对正态分布的分布检验有 Shapiro - Wilk 检验与偏峰度检验等。

9.5.1 Shapiro - Wilk 检验

国际上及我国国标 GB 4882—85 对所假设的分布是否符合正态分布的拟合优度检验使用 Shapiro - Wilk 检验, 该方法适用于 $3 \leq n \leq 50$ 的完全样本, 其检验步骤如下:

① 将样本从小到大排成顺序统计量

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$$

② 按附表 B. 11 中 $\alpha_{k,n}$ 系数表查出对应于 n 值的 $\alpha_{k,n}$ 值, $k=1, 2, \dots$;

③ 计算统计量

$$Z = \frac{\left[\sum_{k=1}^l \alpha_{k,n} (x_{(n+1-k)} - x_{(k)}) \right]^2}{\sum_{k=1}^n (x_{(k)} - \bar{x})^2} \quad (9.30)$$

其中

$$l = \begin{cases} \frac{n}{2} & (\text{当 } n \text{ 为偶数时}) \\ \frac{n-1}{2} & (\text{当 } n \text{ 为奇数时}) \end{cases}$$

④ 根据显著性水平 α 和 n 查附表 B.12 得 Z_α 。

⑤ 作出判断:若 $Z \leq Z_\alpha$, 则拒绝 H_0 ; 否则, 不拒绝 H_0 。

例 9.12 某种材料的抗拉强度为 X , 它的一个样本量为 $n=10$ 的样本数据(单位:略)为 25.00, 21.32, 25.09, 23.79, 20.92, 25.53, 24.50, 23.58, 23.62, 26.38。问能否拒绝假设 H_0 : X 为正态分布。

解: 用 Shapiro-Wilk 对数据进行正态分布检验。

① 将数据排列成顺序统计量

20.92 21.32 23.58 23.62 23.79 24.50 25.00 25.09 25.53 26.38

② $n=10$, 查附表 B.11 得

$$\alpha_{1,10} = 0.5739, \alpha_{2,10} = 0.3291, \alpha_{3,10} = 0.2141, \alpha_{4,10} = 0.1224, \alpha_{5,10} = 0.0399$$

③ 因 n 为偶数, $l=5$, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \alpha_{k,n} (x_{(n+1-k)} - x_{(k)}) &= 0.5379(x_{(10)} - x_{(1)}) + 0.3291(x_{(9)} - x_{(2)}) + \\ &0.2141(x_{(8)} - x_{(3)}) + 0.1224(x_{(7)} - x_{(4)}) + 0.0399(x_{(6)} - x_{(5)}) = \\ &5.0395 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (x_{(k)} - \bar{x})^2 = 27.4698, \quad \bar{x} = 23.973$$

$$Z = \frac{5.0395^2}{27.4698} = 0.9245$$

④ $\alpha=0.05$ 查附表 B.12, 得 $Z_\alpha=0.842$, 则

$$Z = 0.9245 > Z_\alpha = 0.842$$

因此不拒绝 H_0 , 认为该材料的抗拉强度宜用正态分布描述。

9.5.2 偏峰度检验

定义偏度为

$$C_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (9.31)$$

定义峰度为

$$C_c = \frac{\mu_4}{\sigma^4} \quad (9.32)$$

其中, μ_3 为三阶中心矩, μ_4 为四阶中心矩, σ^2 为方差。

由于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的偏度为 0, 峰度为 3, 所以可以通过样本偏度和峰度是否接近 0 和 3 来判断数据是否服从正态分布。

从总体为 $F(t)$ 的分布中, 抽取容量为 n 的样本: t_1, t_2, \dots, t_n , 则可由样本矩得到总体偏度和峰度的估计:

样本均值

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

样本二阶中心矩

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$$

样本三阶中心矩

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3$$

样本四阶中心矩

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^4$$

把它们代入式(9.31)和式(9.32)即得到样本的偏度和峰度,看其是否接近0和3,然后作出数据是否服从正态分布的判断。至于更详尽的偏峰度检验,读者可参阅参考文献[3]。

例 9.13 某样本观测值为 2, 11, 11, 13, 17, 18, 20, 24, 27, 29, 29, 29, 30, 39, 44。试计算其偏度和峰度,并初步选择其分布。

解:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i = 22.867, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 = 117.982$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\mu}_2} = 10.862, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3 = 68.944$$

$$\hat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^4 = 34\,325.356$$

$$\hat{C}_s = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = 68.944/10.862^3 = 0.054$$

$$\hat{C}_e = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} = 34\,325.356/10.862^4 = 2.466$$

这组样本的偏度近似为0,可知其失效密度曲线基本对称,而样本峰度 $\hat{C}_e=2.466$,与3接近,因此粗略认为其分布为正态分布。

9.6 分布的似然比检验

对某些实际的数据,有时会有多个分布都能通过拟合优度检验,这时应该从中选取最适当的分布进行数据分析,通常采用分布的似然比检验来实现。

设总体 X 是具有未知位置参数 a 和尺度参数 b 的连续型随机变量, $f(x; a, b)$ 是其概率密

度函数,考虑检验问题

$$H_0: f(x; a, b) = f_0(x; a, b) \quad (9.33)$$

$$H_1: f(x; a, b) = f_1(x; a, b)$$

为检验这两个假设中的哪一个成立,从母体 X 中取一个容量为 n 的子样 (X_1, X_2, \dots, X_n) , Lehmann 提出检验统计量用极大似然比

$$\lambda = \frac{\max_{a,b} \prod_{i=1}^n f_1(X_i; a, b)}{\max_{a,b} \prod_{i=1}^n f_0(X_i; a, b)} = \frac{\prod_{i=1}^n f_1(X_i; \hat{a}, \hat{b})}{\prod_{i=1}^n f_0(X_i; \hat{a}, \hat{b})} \quad (9.34)$$

其中, \hat{a}, \hat{b} 分别是未知参数 a, b 的极大似然估计。根据极大似然原理,当 λ 取值较大时,说明分子部分出现的可能性大,因而拒绝原假设 H_0 ,接受 H_1 ;反之,当 λ 取值较小时,说明分母部分出现的可能性大,因而不拒绝原假设 H_0 ,拒绝 H_1 。由此可知,检验规则为

$\lambda > K$ 时,拒绝 H_0

$\lambda \leq K$ 时,不拒绝 H_0

对于给定的显著性水平 α ,要求临界值 K ,必须知道统计量 λ 的取样分布,这是一件困难的事,没有一般的结论,只能针对具体的 $f_0(x; a, b), f_1(x; a, b)$ 予以解决。

9.6.1 区分正态分布和指数分布的检验

对于假设

$$H_0: f_0(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad H_1: f_1(x; a, b) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} \quad (9.35)$$

其极大似然比统计量为

$$\lambda = \frac{\max_{a,b} \prod_{i=1}^n \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}}}{\max_{\mu,\sigma} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{\left(\frac{1}{\hat{b}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{a})\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \hat{\sigma}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2\right]} \quad (9.36)$$

其中

$$\hat{a} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) = \min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{(1)}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)}), \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

分别是未知参数 a, b, μ, σ^2 的极大似然估计。代入式(9.36),化简后得

$$\lambda = \left[\frac{\sqrt{2\pi n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})} \right]^n e^{-\frac{n}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{n}{2}} D^n \quad (9.37)$$

其中

$$D = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{b}} = \frac{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sum_{i=1}^n (X_i - X_{(1)})} \tag{9.38}$$

由于 $\lambda > K$ 等价于 $D > K'$, 所以统计量 D 可以作检验的统计量。Antle 等计算了统计量 D 的临界值表, 并给出了检验的功效 g , 如表 9.12 所列。

表 9.12 对于假设式(9.35)检验的临界值及功效

水 平 样本量	$\alpha=0.01$		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.10$	
	D_α	g	D_α	g	D_α	g
n						
10	1.01	0.39	0.87	0.65	0.80	0.77
15	0.88	0.65	0.77	0.86	0.72	0.93
20	0.80	0.86	0.71	0.96	0.67	0.98
25	0.76	0.94	0.68	0.99	0.64	0.99
30	0.72	0.98	0.65	1.00	0.61	1.00

对于给定显著性水平 α , 由表 9.12 查临界值 $K = D_\alpha$ 。当由子样得 D 的观察值大于临界值 D_α 时, 拒绝 H_0 , 不拒绝 H_1 ; 而当 $D \leq D_\alpha$ 时, 拒绝 H_1 , 不拒绝 H_0 。

例 9.14 测量 20 个某种产品的强度, 得数据 35.15, 44.62, 40.85, 45.32, 36.08, 38.97, 32.48, 34.36, 38.05, 26.84, 33.68, 42.90, 33.57, 36.64, 33.82, 42.26, 37.88, 38.57, 32.05, 41.50。试问这批数据是来自正态母体, 还是来自双参数指数分布母体。

解: 假如这批数据来自正态母体 $f_0(x; \mu, \sigma^2)$, 则可计算 μ 和 σ^2 的极大似然估计

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 37.23, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (4.6)^2$$

假如这批数据来自双参数指数分布母体 $f_1(x; a, b)$, 则可计算 a 与 b 的极大似然估计

$$\hat{a} = x_{(1)} = 26.84, \quad \hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{(1)}) = 10.39$$

根据例题要求, 需要对假设

$$H_0: f(x) = f_0(x; \hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$$

$$H_1: f(x) = f_1(x; \hat{a}, \hat{b})$$

作出判断。为此计算统计量 D 的观察值

$$D = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{b}} = \frac{4.6}{10.39} = 0.44$$

如给出显著性水平 $\alpha=0.10$, 查表 9.12 可知 $D_{0.1}=0.67$, 由于 $D=0.44 < D_{\alpha}=0.67$, 所以不拒绝 H_0 , 拒绝 H_1 , 这意味着相对于双参数指数分布而言, 认为产品的强度数据服从正态分布是妥当的。

从表 9.12 可知, 对于 $n=20$, 此检验方法的功效 $g=0.98$, 即犯第二类错误的概率只有 0.02, 这是一个使用方便、效率又高的检验方法。此检验方法可以用于区分指数分布和正态分布, 亦可用于区分指数分布和对数正态分布(只要将数据取对数后, 再进行检验即可)。

9.6.2 区分对数正态分布和威布尔分布的检验

对于假设

$$\left. \begin{aligned} H_0: f_0(x; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0 \\ H_1: f_1(x; m, \eta) &= \frac{m}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m}, \quad x > 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

其极大似然比统计量为

$$\lambda = \frac{\max_{m, \eta} \prod_{i=1}^n \frac{m}{\eta} \left(\frac{X_i}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{X_i}{\eta}\right)^m\right]}{\max_{\mu, \sigma} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma X_i}} \exp\left[-\frac{(\ln X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]} = \frac{\left(\frac{\hat{m}}{\hat{\eta}}\right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{m}-1} \exp\left[-\left(\frac{X_i}{\hat{\eta}}\right)^{\hat{m}}\right]}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}}\right)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \exp\left[-\frac{(\ln X_i - \hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right]} \quad (9.40)$$

其中, $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$ 和 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2$ 分别是参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计; $\hat{m}, \hat{\eta}$ 是威布尔分布中两个未知参数 m, η 的极大似然估计, 它们无分析表达式, 可用数值方法对方程组

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta} \frac{1}{\hat{m}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\hat{m}} \\ \sum_{i=1}^n X_i^{\hat{m}} \ln X_i - \frac{1}{\hat{m}} \sum_{i=1}^n X_i^{\hat{m}} &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i^{\hat{m}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

迭代求解。将 μ, σ, m, η 的极大似然估计代入统计量 λ , 并化简得

$$\lambda = \frac{\prod_{i=1}^n f_1(X_i; \hat{m}, \hat{\eta})}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n \prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i} \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2}{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (\ln X_i - \hat{\mu})^2}\right]} = \frac{(2\pi e \hat{\sigma}^2)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n X_i f_1(X_i; \hat{m}, \hat{\eta})}{(9.42)}$$

如设

$$E = (2\pi e \hat{\sigma}^2)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{i=1}^n X_i f_1(X_i; \hat{m}, \hat{\eta}) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (9.43)$$

则 $\lambda > K$ 等价于 $E > K' = K^{1/n}$, 所以统计量 E 可以作为检验的统计量, 而检验规则为

$E > K'$ 时, 拒绝 H_0 , 不拒绝 H_1

$E \leq K'$ 时, 不拒绝 H_0 , 拒绝 H_1

为求临界值 K' , 必须知道统计量 E 的分布, 表 9.13 给出了临界值 E_α 及检验的功效 g 。

对于给出的显著性水平 α , 从表 9.13 中可查得相应的临界值 E_α 。当由子样计算所得的统计量 E 的观察值 $E > E_\alpha$ 时, 拒绝 H_0 , 不拒绝 H_1 , 即相对于对数正态分布, 认为此子样来自威布尔分布较为妥当。而当 $E \leq E_\alpha$ 时, 拒绝 H_1 , 不拒绝 H_0 , 即相对于威布尔分布, 认为此子样来自对数正态分布较为妥当。

表 9.13 对于假设式(9.39)检验的临界值及功效

水 平 样本量	$\alpha=0.20$		$\alpha=0.10$		$\alpha=0.05$		$\alpha=0.01$	
	E_α	g	E_α	g	E_α	g	E_α	g
20	1.015	0.75	1.038	0.61	1.082	0.48	1.144	0.22
30	0.995	0.86	1.020	0.75	1.044	0.63	1.095	0.39
40	0.984	0.93	1.007	0.85	1.028	0.76	1.070	0.53
50	0.976	0.96	0.998	0.91	1.014	0.83	1.054	0.63

例 9.15 要判定一批球轴承的使用寿命是威布尔分布, 还是对数正态分布。为此, 从这批球轴承中任取 23 个进行寿命试验, 得数据(单位: 百万转)如下: 17.88, 28.92, 33.00, 41.52, 42.12, 45.60, 48.48, 51.84, 51.96, 54.12, 55.56, 67.80, 68.64, 68.64, 68.88, 84.12, 93.12, 98.64, 105.12, 105.84, 127.92, 128.04, 173.40。

解: 假如这批数据来自对数正态母体 $f_0(x; \mu, \sigma^2)$, 则可计算 μ 和 σ^2 的极大似然估计

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln t_i = 4.15, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln t_i - \hat{\mu})^2 = 0.272$$

假如这批数据来自威布尔分布 $f_1(x; m, \eta)$, 则可计算 m 和 η 的极大似然估计

$$\hat{m} = 2.102, \quad \hat{\eta} = 81.88$$

根据例题要求, 需对假设

$$H_0: f(x) = f_0(x; \mu, \sigma^2)$$

$$H_1: f(x) = f_1(x; m, \eta)$$

作出判断。为此计算统计量 E 的观察值

$$E(t) = (2\pi e \times 0.272)^{\frac{1}{2}} \left[\prod_{i=1}^{23} t_i f_1(t_i; 2.102, 81.88) \right]^{\frac{1}{23}} = 0.976$$

查表 9.13 中 $n=20, n=30$ 这两行的不同显著性水平下的 E_α 都比 $E=0.976$ 大, 所以有 $E < E_\alpha$, 不拒绝 H_0 , 在这两个分布中认为对数正态分布是球轴承的使用寿命分布较为妥当。

习 题

9.1 某元件寿命服从参数为 λ 的指数分布, 随机抽取 20 只元件进行定数截尾寿命试验, 至 10 只失效时停止, 结果(单位: h)为: 20, 50, 640, 640, 750, 890, 970, 1 110, 1 660, 2 410。进行拟合优度检验验证元件寿命是否服从指数分布, 包括 F 检验法和 χ^2 检验法。

9.2 从某种绝缘材料中随机地抽取 $n=19$ 只样品。在一定条件下进行寿命试验, 其失效时间(单位: h)分别为: 0.19, 0.78, 0.96, 1.31, 2.78, 3.16, 4.15, 4.67, 4.85, 6.50, 7.35, 8.01, 8.27, 12.00, 13.95, 16.00, 21.21, 27.11, 34.95。试检验其是否服从威布尔分布。

9.3 某厂生产的产品, 抽取 19 个进行寿命试验, 其寿命(单位: h)值分别为 1 015, 1 072, 1 100, 1 123, 1 145, 1 170, 1 175, 1 190, 1 196, 1 205, 1 212, 1 220, 1 238, 1 245, 1 260, 1 269, 1 277, 1 290, 1 360。问其是否服从平均寿命 $\mu=1 100$ h、标准差 $\sigma=200$ h 的正态分布, 取显著性水平 $\alpha=0.1$ 。

9.4 对某种产品, 随机抽取 60 个样品进行试验后, 得到如下结果(见题表 9.1), 请用 χ^2 检验判断其是否服从正态分布 $N(61.22, 21.45^2)$, 取显著性水平 $\alpha=0.05$ 。

题表 9.1 试验结果

序 号	区间端点值	失效频数	序 号	区间端点值	失效频数
1	3.75~36.75	7	4	69.75~86.25	12
2	36.75~53.25	16	5	86.25~119.25	8
3	53.25~69.75	17			

第 10 章 几种离散型分布的统计推断

除了连续分布之外,还有几个常用的离散分布在可靠性研究中占有很重要的地位。本章分别介绍二项分布、超几何分布和泊松分布等的统计推断。

10.1 二项分布的统计分析

设随机变量 X 服从二项分布 $B(n, p)$, 即

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

其中, n 已知, 参数 p 主要解释为某可重复事件 A 发生的概率。本节讨论参数 p 的估计。

10.1.1 参数 p 的估计

1. 点估计

事件 A 发生的频率是事件 A 发生概率 $P = P(A)$ 的一致最小方差无偏估计(UMVUE)。其中, r 为 n 次独立重复试验中事件 A 出现的次数, 则 p 的估计为

$$\hat{p} = r/n \quad (10.1)$$

2. 精确置信区间

在 n 次独立重复试验中事件 A 出现 x 次的概率表示为

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

则在 n 次独立重复试验中事件 A 出现次数不超过 r 次的概率为

$$P_{\text{cum}}(r) = P(x \leq r) = \sum_{x=0}^r \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

又 $\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1$ 与 $P_{\text{cum}}(r)$ 关于 p 非降, 于是, 在置信度为 $1-\alpha$ 时, 参数 p 的置信

下限 p_L 由下式确定, 即

$$\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} p_L^x (1-p_L)^{n-x} = 1 - \alpha \quad (10.2)$$

相应的, 在置信度为 $1-\alpha$ 时, 置信上限 p_U 由下式确定, 即

$$\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} (1-p_U)^{n-x} p_U^x = \alpha \quad (10.3)$$

同理可给出在置信度为 $1-\alpha$ 时, 参数 p 的置信区间为

$$(p_L, p_U) \quad (10.4)$$

其中, p_L 和 p_U 由 $\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} p_L^x (1-p_L)^{n-x} = 1-\alpha/2$ 和 $\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} (1-p_U)^{n-x} p_U^x = \alpha/2$ 确定。

另一方面, 由二项分布和 F 分布的关系, 参数 p 的 $1-\alpha$ 置信区间还可以表示为

$$\left\{ \frac{r}{r + (n-r+1)F_{1-\alpha/2}(2(n-r+1), 2r)}, \frac{(r+1)F_{1-\alpha/2}(2(r+1), 2(n-r))}{r+1 + (n-r)F_{1-\alpha/2}(2(r+1), 2(n-r))} \right\} \quad (10.5)$$

3. 近似置信区间

利用正态分布可得参数 p 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为

$$\left. \begin{aligned} p_L &= \frac{n}{n + u_{1-\alpha/2}^2} \left\{ \hat{p} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n} + u_{\alpha/2} \left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2} \right]^{1/2} \right\} \\ p_U &= \frac{n}{n + u_{1-\alpha/2}^2} \left\{ \hat{p} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n} + u_{1-\alpha/2} \left[\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

进一步, 当 n 较大时, 式(10.5)可用下式作为 p 的粗略近似置信区间, 即

$$\left[\hat{p} + \frac{1}{2n} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + \frac{1}{2n} + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] \quad (10.7)$$

例 10.1 某市随机抽取 20 个家庭, 发现有 7 家拥有电脑。据此作出该市家庭拥有电脑的比例 p 的区间估计, 取置信水平为 0.95。

解: 由式(10.1)计算比例 p 的点估计 $\hat{p} = 7/20 = 0.35$, 然后由式(10.4)得到 p 的 95% 的精确置信区间 (0.154, 0.592), 而由式(10.5)所得的 95% 的近似置信区间为 (0.142, 0.567)。

10.1.2 可靠度的区间估计

二项分布中的比率 p 在可靠性中常表示失效概率, 这时 $R = 1-p$ 就是可靠度。

1. 可靠度 R 的精确置信区间

R 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(R_L, R_U) \quad (10.8)$$

其中, R_L, R_U 分别由

$$\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} R_L^{n-x} (1-R_L)^x = \alpha/2$$

和

$$\sum_{x=0}^{n-r} \binom{n}{x} (1-R_U)^{n-x} R_U^x = \alpha/2$$

确定;其中, r 指在试验期间所投入的 n 个产品的失效数。相应的, R 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限 R_L 由下式确定,即

$$\sum_{x=0}^r \binom{n}{x} R_L^{n-x} (1-R_L)^x = \alpha \quad (10.9)$$

当 $r=n-1$ 时, $R_L=1-\sqrt[n]{1-\alpha}$; 当 $r=n$ 时, 规定 $R_L=0$ 。在 $r=0$ 时, 由式(10.9)得到

$$R_L = \alpha^{1/n} \quad (10.10)$$

例 10.2 从一批雷管中抽取 20 只进行试验, 失效数为 0, 计算置信度为 0.95 时的可靠度下限 R_L 。

解: 该试验属于成败型试验。 $n=20, r=0, 1-\alpha=0.95$, 即 $\alpha=0.05$ 。由式(10.10)可知

$$R_L = \alpha^{1/n} = 0.05^{1/20} = 0.86$$

二项分布和泊松分布之间有一定的关系, 当样品数 n 很大, 失效数较小时, 可用泊松分布进行计算, 使用式(5.4)。利用正态近似及式(10.6)或式(10.7)可给出 R 的近似置信区间, 下面给出另一种近似表达式。

2. 可靠度置信下限 R_L 的贝泽-普拉特 (Peizer - Pratt) 近似

当 $r=0, n-1, n$ 时, 分别按 $\sqrt[n]{\alpha}, 1-\sqrt[n]{1-\alpha}$ 和 0 计算 \hat{R}_L 。当 $r=1, 2, 3$ 时按对数伽马近似计算, 其他场合用贝泽-普拉特近似计算。由此, R 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信下限可表示为

$$R_L = \begin{cases} \sqrt[n]{\alpha}, & r=0 \\ \exp\left[-\frac{\chi_{1-\alpha}^2(2Z)}{2\eta}\right], & r=1, 2, 3 \\ h^{-1}(u_\alpha), & 4 \leq r \leq n-2 \\ 1-\sqrt[n]{1-\alpha}, & r=n-1 \\ 0, & r=n \end{cases} \quad (10.11)$$

其中

$$Z = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-r}\right)}{\ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)}, \quad \eta = \frac{3-c}{2(c-1)-0.355(c-1)^3}, \quad c = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-r}\right)}{\ln\left(\frac{n+2}{n-r+1}\right)}$$

而 $h^{-1}(u_\alpha)$ 为函数 $h(y)$ 的反函数在正态分布分位点 u_α 处的值, 这里 $h(y)$ 为

$$h(y) = \frac{d}{|r+0.5-n(1-y)|} \left\{ \frac{2}{1+\frac{1}{6n}} \times \left[(r+0.5) \ln \frac{r+0.5}{n(1-y)} + \right. \right. \\ \left. \left. (n-r-0.5) \ln \frac{n-r+0.5}{ny} \right] \right\}^{1/2}$$

其中, $d = r + 0.5 + \frac{1}{6} - \left(n + \frac{1}{3}\right)(1-y) + 0.02 \left(\frac{y}{r+1} - \frac{1-y}{n-r} + \frac{R-0.5}{n+1}\right)$ 。不过, 在具体计算

时, $\hat{R}_L = h^{-1}(u_\alpha)$ 需要借助数值方法求解。上述近似计算的精确度较高, 绝对误差小于 10^{-4} 。

例 10.3 已知 $n=50, r=4, 1-\alpha=0.90$, 求可靠度 R 的精确置信下限和贝泽-普拉特近似置信下限。

解: 由式(10.8)得到 R 的 0.90 精确置信下限 0.846 452, 由式(10.9)通过数值方法得到 R 的 0.90 近似置信下限 0.846 476。

10.2 超几何分布的统计分析

超几何分布的单侧置信下限 R_L 由下式确定, 即

$$\sum_{x=0}^r \frac{n!(N-n)!(N-NR_L)!(NR_L)!}{N!x!(n-x)!(N-NR_L-x)!(NR_L-n+x)!} = \alpha \quad (10.12)$$

其中, 随机变量 x 表示失效次数, N 指批量, n 为试验次数, r 为失效数, α 为显著性水平, 相应的 $1-\alpha$ 为置信水平。

根据 N, n, r, α , 由式(10.12)用迭代法可求出 R_L 。另外, GJB 376—87 也为之提供了数值表, 因此可根据 N, n, r, α , 直接查 GJB 376—87 或由附表 B.7 也可得到 R_L 。

例 10.4 设某产品的批量 $N=300$, 试验数 $n=40$, 其中合格数 $s=39$, 求置信水平为 $1-\alpha=0.9$ 时, 此产品可靠度的置信下限 R_L 。

解: 这里 $N=300, n=40, r=40-39=1, 1-\alpha=0.9$, 查附表 B.7, 得 $R_L=0.910 7$ 。

10.3 泊松分布的统计分析

设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$, 即

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, \dots$$

下面分别介绍泊松分布参数 λ 的点估计与区间估计。

1. 点估计

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自泊松总体 $P(\lambda)$ 的一个容量为 n 的样本, 则样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 为参数 λ 的无偏估计。

2. 置信区间

当样本容量 n 较大时, 由正态近似可得 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left[\bar{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n} + u_{\alpha/2} \left(\frac{\bar{X}}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \bar{X} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2n} + u_{1-\alpha/2} \left(\frac{\bar{X}}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (10.13)$$

若 $n=1$, 则可使用两种类型的置信区间:

① 等尾置信区间。 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的等尾置信区间为

$$\left\{ \frac{1}{2} \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 (2X), \frac{1}{2} \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 [2(X+1)] \right\} \quad (10.14)$$

当观测值 X 较大 (≥ 30) 时, 上式可近似表示为

$$\left[\left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{2} - \sqrt{X} \right)^2, \left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{2} + \sqrt{X+1} \right)^2 \right] \quad (10.15)$$

若 $X=0$, 则 λ 的 $1-\alpha$ 置信下限为 $\lambda_L=0$, 而 λ 的 $1-\alpha$ 置信上限可用 $\lambda_U = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2 (2)$ 计算。

② 不等尾置信区间。这种置信区间的长度最短, 通过查附表 B. 8 可得。

例 10.5 某一地区在一个世纪中发生 4 次洪水, 如果假设各个世纪发生洪水的次数服从泊松分布, 试求一个世纪中发生洪水平均次数的 95 % 置信区间。

解: 泊松随机变量的期望等于泊松分布中的参数 λ , 因此由 $X=4$, 查附表 B. 8 可知 λ 的 95 % 的置信区间为 (1.39, 9.60), 而由式 (10.14) 计算的置信区间为 (1.09, 10.24), 显然, 前者更窄, 即具有更高的精度。

习 题

10.1 在买面包作为早点的男、女消费者中, 男性购买者的比例 p 未知, 但通过调查知道 $1/2 \leq p \leq 2/3$ 。设在 70 个购买者中发现 12 个是男性, 58 个是女性, 求 p 的极大似然估计。如果对 p 没有限制, 那么 p 的极大似然估计又是什么呢?

10.2 为检查某爆炸螺栓能否可靠起爆, 随机抽取 200 只进行起爆试验, 发现 2 只未爆。试估算该爆炸螺栓起爆可靠性的置信度为 0.8 的置信区间及其置信度为 0.8 的单侧置信下限。

10.3 在某公路上, 50 min 内, 观测每 15 s 路过的汽车的辆数, 得到的数据如题表 10.1 所列。

题表 10.1 观测数据

路过的车辆数 i	0	1	2	3	4	5
次数 n_i	92	68	28	11	1	0

这批数据服从泊松分布, 试求泊松分布参数 λ 的点估计与置信水平为 0.9 的区间估计。

第 11 章 非参数统计推断

在总体分布已知的情况下,可以使用参数方法,求得产品寿命的分布参数,从而得出可靠度等指标的估计。但有些情况下,很难确定产品的寿命分布类型,有时虽然产品的寿命分布类型已知,但获得的数据仅仅是失效个数,没有精确的失效时间,这时也需要借助非参数方法进行统计推断。

在参数方法中,由于对分布作了较严格的限制,因此参数方法一般精度较高,但缺乏稳健性,即如果所讨论的分布并不符合所作的假定,那么精度就会很差。而非参数方法,由于对分布只作了很弱的限制,所以它具有稳健性,但是估计的精度、效率一般较低。

在实际中,要依据对一个统计问题所能获得的信息来确定选用参数方法还是非参数方法。在知道总体的分布类型时,应尽量选用参数方法;当不能确定总体分布类型时,选用非参数方法。

11.1 可靠度的非参数估计

对于非参数的统计推断,很多时候要借助二项分布来实现。至于二项分布的一般理论,在第 9 章已介绍,本节着重通过二项分布与贝塔分布、 F 分布的关系来进行统计分析。

11.1.1 贝塔分布法

1. 贝塔分布

贝塔分布也称不完全 β 函数。其分布密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(u,v)} x^{u-1} (1-x)^{v-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (11.1)$$

其中, $B(u,v)$ 为贝塔函数,而 u, v 为贝塔分布 $\beta(u,v)$ 的分布参数。其分布函数为

$$I_p(u,v) = P(\xi \leq p) = \frac{1}{B(u,v)} \int_0^p x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx \quad (11.2)$$

贝塔分布函数具有性质

$$I_p(u,v) = 1 - I_{1-p}(v,u) \quad (11.3)$$

2. $F_n(t_{(i)})$ 的分布

在一批受试的 n 个样品中,将其失效时间按从小到大排列,得到顺序统计量

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(n)}$$

对其中任一顺序统计量 $t_{(i)}$, $F_n(t_{(i)})$ 分布函数可以用贝塔分布表示, 即

$$P\{F_n(t_{(i)}) \leq p\} = I_p(i, n-i+1) \quad (11.4)$$

因此, 当失效数为 r 时, 其中位秩是当 $I_p(r, n-r+1) = 0.5$ 时 $F_n(t_{(r)}) = p$ 的值, 即 p 为贝塔分布 $\beta(r, n-r+1)$ 的 0.5 分位点, 由此列出样品量为 n 、失效数为 r 时的中位秩表, 见表 4.4。

3. 经验分布函数的置信区间

当给定置信度为 $1-\alpha$ 时, $F_n(t_{(i)})$ 的置信上、下限是对应

$$I_p(i, n-i+1) = 1-\alpha/2 \quad (11.5)$$

和

$$I_p(i, n-i+1) = \alpha/2 \quad (11.6)$$

的 $F_n(t_{(i)}) = p$ 的值, 附表 B.10 给出了 $\alpha=0.05, 0.95, 0.1$ 和 0.9 时 $F_n(t_{(i)})$ 的置信限。

根据贝塔分布, 可以对产品的经验分布 $F_n(t)$ 给出在置信度 $1-\alpha$ 要求下, $F_n(t)$ 的置信上、下限。

11.1.2 F 分布法

由于式(10.2)~式(10.4)计算繁琐, 可以用 F 分布来计算可靠度在 $1-\alpha$ 置信水平下的置信区间。

贝塔分布 $I_p(u, v) = \alpha$ 和 F 分布之间有如下关系:

$$\frac{u}{u + vF_{1-\alpha}(2v, 2u)} = p$$

其中, p 为贝塔分布 $\beta(u, v)$ 的 α 分位数, $F_{1-\alpha}(2v, 2u)$ 指自由度为 $(2v, 2u)$ 的 F 分布的 $1-\alpha$ 分位点。

使用贝塔分布法计算置信度为 $1-\alpha$ 时, 可靠度的置信区间如下。

1. 定数截尾

(1) 区间估计

$$R_L = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r}{n-r+1} F_{1-\alpha/2}(2r, 2(n-r+1)) \right\}} \quad (11.7)$$

$$R_U = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r}{n-r+1} F_{\alpha/2}(2r, 2(n-r+1)) \right\}} \quad (11.8)$$

(2) 单侧下限

$$R_L = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r}{n-r+1} F_{1-\alpha}(2r, 2(n-r+1)) \right\}} \quad (11.9)$$

2. 定时截尾

(1) 区间估计

$$R_L = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r+1}{n-r} F_{1-\alpha/2}(2(r+1), 2(n-r)) \right\}} \quad (11.10)$$

$$R_U = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r}{n-r+1} F_{\alpha/2}(2r, 2(n-r+1)) \right\}} \quad (11.11)$$

(2) 单侧下限

$$R_L = \frac{1}{\left\{ 1 + \frac{r+1}{n-r} F_{1-\alpha}(2(r+1), 2(n-r)) \right\}} \quad (11.12)$$

例 11.1 某产品随机抽取 50 个进行试验, 在 110 h 时停止试验, 失效 2 个。试求置信度为 0.95 时的可靠度置信区间。

解: $n=50, r=2$, 定时截尾。由式(11.10)与式(11.11)得到

$$R_L = \frac{1}{\left[1 + \frac{2+1}{50-2} F_{0.975}(2 \times 3, 2 \times 48) \right]} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{48} \times 4.93 \right)} = 0.765$$

$$R_U = \frac{1}{\left[1 + \frac{2}{50-2+1} F_{0.025}(2 \times 2, 2 \times 49) \right]} = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{49} \times 0.339 \right)} = 0.986$$

11.2 分布分位数的非参数估计

在可靠性数据分析中, 经常需要计算可靠性指标的点估计、区间估计或者置信下限等, 这些指标都可以通过分布的分位数来计算, 例如产品可靠度在 90 % 的置信水平下的置信下限, 实际上就是可靠度分布函数的 10 % 分位数。本节介绍分布分位数的点估计与区间估计。

11.2.1 分位数的点估计

对一个总体分布 $F(x)$, p 分位数 ξ_p 满足下述条件: $F(\xi_p) \geq p, F(\xi_p - 0) \leq p (0 < p < 1)$, 估计 ξ_p 是常见的估计问题。对参数分布而言, p 分位数常可通过参数表查出, 因此得到参数估计后, 可获得相应的 p 分位数估计。但对总体分布形式无先验知识的情况下, 用样本顺序统计量可构成 p 分位数的非参数估计, 即用样本的 p 分位数作为总体的 p 分位数的估计。

定义 11.1 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $F(x)$ 的独立同分布样本, 由 X_1, X_2, \dots, X_n 构成的经验分布函数记为 $F_n(x)$, 则

$$F_n^{-1}(p) = \inf\{x: F_n(x) \geq p\} \quad (11.13)$$

称为样本的 p 分位数。用样本的 p 分位数估计总体的 p 分位数具有强相合性和渐近正态性。

11.2.2 分位数的区间估计

设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自连续分布 $F(x)$ 的独立同分布样本, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 为样本顺序统计量, 则 $U=F(X_{(k)}), V=F(X_{(l)})$ 的二维联合分布为 Dirichlet 分布, 密度函数为

$$f(u, v) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(l-k)\Gamma(n-l+1)} u^{k-1} (v-u)^{l-k-1} (1-v)^{n-l}, \quad 0 < u < v < 1, \quad k < l$$

在实际中, 通常给定置信水平 $1-\alpha$, 选择分位数 ξ_p 的置信下限 $X_{(k)}$, 使

$$P(\xi_p \leq X_{(k)}) = P[p \leq F(X_{(k)})] \leq \frac{\alpha}{2} \quad (11.14)$$

选择分位数 ξ_p 的置信上限 $X_{(l)}$, 使

$$P(\xi_p \geq X_{(l)}) = P[p \geq F(X_{(l)})] \leq \frac{\alpha}{2} \quad (11.15)$$

经过等价变换之后, k, l 的确定可通过下面的两个方程计算

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} \int_0^p t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (11.16)$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(l)\Gamma(n-l+1)} \int_0^p t^{l-1} (1-t)^{n-l} dt \leq \frac{\alpha}{2} \quad (11.17)$$

这样, $[X_{(k)}, X_{(l)}]$ 就是分位数 ξ_p 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信区间。

对于分位数 ξ_p 的单侧置信限, 分别选择 k, l 满足

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} \int_0^p z^{k-1} (1-z)^{n-k} dz \geq 1 - \alpha \quad (11.18)$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(l)\Gamma(n-l+1)} \int_0^p z^{l-1} (1-z)^{n-l} dz \leq \alpha \quad (11.19)$$

得到相应的单侧置信下限 $X_{(k)}$ 和置信上限 $X_{(l)}$ 。

在大样本情形下, 可利用样本 p 分位数 $\hat{\xi}_p$ 的渐近正态性, 构造区间估计, $F(X_{(k)})$ 为 $(0, 1)$ 均匀分布样本的 k/n 分位数, 所以

$$\frac{\sqrt{n}[nF(X_{(k)}) - k]}{\sqrt{k(n-k)}} \stackrel{A}{\sim} N(0, 1)$$

其中, “ $\stackrel{A}{\sim}$ ” 指渐近服从, 于是

$$P[\xi_p \leq X_{(k)}] = P[p \leq F(X_{(k)})] = P\left\{ \frac{\sqrt{n}[nF(X_{(k)}) - k]}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \frac{\sqrt{n}(np - k)}{\sqrt{k(n-k)}} \right\} \approx \Phi\left[-\frac{\sqrt{n}(np - k)}{\sqrt{k(n-k)}} \right]$$

从而 k 应满足

$$-\frac{\sqrt{n}(np - k)}{\sqrt{k(n-k)}} \leq u_\alpha \quad (11.20)$$

其中, u_α 为标准正态分布 $N(0,1)$ 的 α 分位数, 满足上式的最大整数 k 即为所求。

类似地, l 为满足下式要求的最小整数

$$\frac{\sqrt{n}(np-l)}{\sqrt{l(n-l)}} \leq u_{1-\alpha} \quad (11.21)$$

通常有 $l=n-k+1$ 。

对于中位数 $\xi_{1/2}$, 求 k, l 有一个计算简单的近似公式:

$$\left. \begin{aligned} k &= \left[\frac{1}{2} \left(n+1 - u_{1-\alpha} \sqrt{n+0.5 - 0.25u_{1-\alpha}^2} \right) \right] \\ l &= n-k+1 \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

其中, $[\cdot]$ 表示下取整运算。

例 11.2 对 34 只晶体管做寿命试验, 寿命(单位: 周)的记录如表 11.1 所列。

表 11.1 晶体管寿命试验数据

寿命/周	3	4	5	6	7	8	9	10	11
频数	1	1	1	2	1	2	3	2	3
寿命/周	13	17	19	25	29	33	42	≥ 52	
频数	5	2	2	1	1	1	2	4	

对于晶体管寿命分布中位数的 0.95 置信水平的单侧置信下限, 由近似式(11.22)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(n+1 - u_{1-\alpha} \sqrt{n+0.5 - 0.25u_{1-\alpha}^2} \right) &= \\ \frac{1}{2} \left(34+1 - 1.645 \times \sqrt{34+0.5 - 0.25 \times (1.645)^2} \right) &= \\ 12.72 \end{aligned}$$

故 $k=[12.72]=12, X_{(k)}=X_{(12)}=10$ 周, 所以分布中位数的 0.95 的单侧置信下限为 10 周。

考虑置信区间

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(n+1 - u_{1-\alpha/2} \sqrt{n+0.5 - 0.25u_{1-\alpha/2}^2} \right) &= \\ \frac{1}{2} \left(34+1 - 1.96 \times \sqrt{34+0.5 - 0.25 \times (1.96)^2} \right) &= \\ 11.82 \end{aligned}$$

故 $k=11, l=n-k+1=34-11+1=24$, 所以分布中位数的置信水平为 0.95 的置信区间 $[X_{(k)}, X_{(l)}]=[9, 19]$ 。

11.3 Bootstrap 方法

随着计算技术和计算机技术的发展, 由美国统计学家 Efron(1979)提出的 Bootstrap 方法

不断发展完善,已成为目前广泛应用的统计推断方法之一。

Bootstrap 方法本质上是一种再抽样技术,把样本看作是总体的一个“缩影”,其基本思想是:既然经验分布函数是总体分布的良好拟合,那么来自总体分布的随机观测值的概率性质可以用经验分布函数的相应统计量的概率性质来近似刻画,而后者可以通过计算机模拟甚至直接计算得到。具体来说,对于来自总体 P 的已知样本 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 设 \hat{P} 是 P 的一个估计,并设根据样本 X 得到目标量 θ 的估计 $\hat{\theta}$ 。从 \hat{P} 产生 B 个独立样本 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_B^*$ 是切实可行的,由样本 $X_b^* (b=1, 2, \dots, B)$ 得到 θ 的估计 $\hat{\theta}_b^* = \hat{\theta}(X_b^*)$, 然后用 $\hat{\theta}_b^*$ 来进行统计推断。当然 \hat{P} 与 P 有差别, $\hat{\theta}$ 与 $\hat{\theta}_b^*$ 不独立,所以该方法不一定正确。因此,对于统计问题,如果用经典的统计方法能够处理,就最好不要用 Bootstrap 方法,当然,统计学家们做了大量的工作来讨论 Bootstrap 方法在许多场合下的正确性与精确度等。

11.3.1 Bootstrap 方差估计

假定得到来自某个总体 X 的一组样本观测值 X_1, X_2, \dots, X_n , 并设基于该样本对目标量 θ 的估计为 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 例如 θ 表示总体均值, 则 $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 。如果以有放回简单随机抽样从样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 抽取 Bootstrap 样本 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$, 称为 Bootstrap 抽样。基于该 Bootstrap 样本 $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$, 按照 $\hat{\theta}$ 的结构构造统计量

$$\hat{\theta}_m^* = \hat{\theta}_m(X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*) \quad (11.23)$$

重复 Bootstrap 抽样 B 次(一般 B 是一个较大的整数), 相应得到 $\hat{\theta}_{m1}^*, \hat{\theta}_{m2}^*, \dots, \hat{\theta}_{mB}^*$, 于是

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_{m,i}^* - \hat{\theta})^2 \quad (11.24)$$

提供了 $\hat{\theta}_m$ 的方差 $V(\hat{\theta}_m)$ 的估计。通常如果将 m 改为 n , 得到 $\hat{\theta}$ 的方差估计为

$$v_B(\hat{\theta}) = \frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_{n,i}^* - \hat{\theta})^2 \quad (11.25)$$

11.3.2 Bootstrap 区间估计

1. Bootstrap 分位数法

如果有来自某个总体 X 的一组样本观测值 X_1, X_2, \dots, X_n , 对原始样本进行 B (如 $B=1000$) 次 Bootstrap 抽样, 每次抽取 n 个样本观测值, 类似于式(11.23), 相应得到目标量 θ 的 B 个估计 $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$, 将它们从小到大重新排列得到 $\hat{\theta}_{(1)}^* \leq \hat{\theta}_{(2)}^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_{(B)}^*$, 那么 θ 的 $1-\alpha$ 的单侧置信上限和单侧置信下限分别为

$$\theta_U = \hat{\theta}_{[B(1-\alpha)]}^* \quad \text{和} \quad \theta_L = \hat{\theta}_{[B\alpha]}^* \quad (11.26)$$

而 θ 的 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$[\hat{\theta}_{[B\alpha/2]}^*, \hat{\theta}_{[B(1-\alpha/2)]}^*] \quad (11.27)$$

其中, $[\cdot]$ 表示下取整运算。

2. Bootstrap - t 法

设 ν 为 $\hat{\theta}$ 的方差估计, 令

$$t(X, \theta) = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\nu}}$$

其中, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 通常称 $t(X, \theta)$ 为 t 统计量。Bootstrap - t 置信下限的具体步骤如下: 令 $\hat{G}(x) = P(t(X^*, \hat{\theta}) \leq x)$ 为 $G(x) = P(t(X, \theta) \leq x)$ 的 Bootstrap 估计, 其中

$$t(X^*, \hat{\theta}) = (\hat{\theta}^* - \hat{\theta}) / \sqrt{\nu^*}$$

这里 ν^* 是 ν 的 Bootstrap 类似物, 则 θ 的 $1-\alpha$ 水平的 Bootstrap - t 置信下限为

$$\theta_L = \hat{\theta} - \sqrt{\nu} \hat{G}^{-1}(1-\alpha) \quad (11.28)$$

注意, 该方法需要先得到方差估计 ν , 可用式(11.25)所得的方差估计 $\nu_B(\hat{\theta})$ 代替, 然后得到基于正态逼近的置信下限为

$$\theta_{NL} = \hat{\theta} - \sqrt{\nu} \times u_{1-\alpha} \quad (11.29)$$

除了介绍的几种最简单的 Bootstrap 方法之外, 还有修正偏度的 Bootstrap 方法、Bootstrap 嫁接方法等。读者若想进一步深入了解和学习 Bootstrap 方法, 可参阅相关文献。

11.4 估计生存函数的非参数方法

在生存分析中, 定义 $S(t) = P(T > t)$ 为生存函数, 与可靠性中的可靠度对应, 因此生存函数的非参数估计方法也适用于可靠性领域。为估计完全未知的生存函数 $S(t)$, 针对不同类型的数据有不同的方法, 这里介绍常用的寿命表法与乘积限估计(PL 估计)。

11.4.1 寿命表法

把区间 $(0, +\infty)$ 分成 $k+1$ 个小区间, $I_j = (a_{j-1}, a_j](j=1, 2, \dots, k+1)$ 。其中, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1} = \infty (k \geq 1)$ 。假设对抽取的 n 个个体的寿命进行观测, 只知道每个个体在哪个区间寿终或右删失。可用下述形式记录和归纳观测数据:

对 $j=1, 2, \dots, k+1$, 令 N_j 指 n 个个体中在时刻 a_{j-1} 仍“活着”, 且把未在 a_{j-1} 之前右删失的个体的个数称为历险数; D_j 指 n 个个体中在 I_j 中寿终的个体的个数; W_j 指 n 个个体中在 $[a_{j-1}, a_j)$ 中右删失个体的个数。显然, $N_1 = n, N_{j+1} = N_j - D_j - W_j (j=1, 2, \dots, k)$ 。

设 $S(t)$ 为生存函数, 令

$P_j = S(a_j), \quad p_j = P_j/P_{j-1}, \quad q_j = 1 - p_j, \quad i = 1, 2, \cdots, k+1, \quad P_0 = 1$
 于是 $P_j = p_1 p_2 \cdots p_j (j=1, 2, \cdots, k+1)$ 。

首先用公式

$$\hat{q}_j = \frac{D_j}{N_j - \frac{1}{2}W_j} \tag{11.30}$$

估计 q_j , 用公式

$$\hat{p}_j = 1 - \hat{q}_j \tag{11.31}$$

估计 p_j , 然后得到 P_j 的估计

$$\hat{P}_j = \prod_{i=1}^j \hat{p}_i \tag{11.32}$$

最后, 对任何 $t > 0$, 选 j 满足 $a_j \leq t < a_{j+1}$, 对 $S(t)$ 用下列估计

$$\hat{S}(t) = \hat{P}_j \tag{11.33}$$

上述这种用式(11.30)~式(11.33)给出的生存函数 $S(t)$ 的估计方法就是历史悠久的寿命表法。为了得到估计值 \hat{P}_j , 常采用列表方式概括原始数据和计算过程, 这就是“寿命表”一词的来源, 列表的栏目如表 11.2 所列。注意在计算 \hat{P}_j 时, 可用递推公式 $\hat{P}_j = \hat{P}_{j-1} \hat{p}_j$ 。

表 11.2 寿命表的计算

区 间	死亡数	删失数	历险数	N'_j	\hat{q}_j	\hat{P}_j	\hat{P}_j
I_j	D_j	W_j	N_j	$N_j - \frac{1}{2}W_j$	D_j/N'_j	$1 - \hat{q}_j$	$\hat{p}_1 \cdots \hat{p}_j$

11.4.2 乘积限估计(PL 估计)

乘积限估计要求数据全部是寿终(失效)数据或右删失(截尾)数据, 不允许出现左截尾或区间型数据。

对来自总体 T 的 n 个个体的寿命进行观测, 得到 t_1, t_2, \cdots, t_n (其中可能有右删失数据), 当 t_i 是寿终数据时, 令 $\delta_i = 1$; 当 t_i 是右删失数据时, 令 $\delta_i = 0$ 。这样数据可记为

$$(t_i, \delta), \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{11.34}$$

将这些 t_i 按从小到大排列, 得 $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \cdots \leq t_{(n)}$ 。当 $t_{(i)}$ 是寿终数据时, 记 $\delta_{(i)} = 1$; 当 $t_{(i)}$ 是右删失数据时, 令 $\delta_{(i)} = 0$ 。

生存函数 $S(t)$ 的乘积限估计定义如下:

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_{(1)}) \\ \prod_{i=1}^j \left(\frac{n-i}{n-i+1} \right)^{\delta_{(i)}}, & t \in [t_{(j)}, t_{(j+1)}), \quad j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ 0, & t \in [t_{(n)}, \infty) \end{cases} \tag{11.35}$$

上述估计简称 PL(Product limit)估计,是 Kaplan 和 Meier(1958)首先提出的,因而又叫 K-M 估计。对于产品来说,生存函数 $S(t)$ 就是可靠度 $R(t)$ 。

当 $t < t_{(n)}$ 时, $\hat{S}(t)$ 有下列统一表达式

$$\hat{S}(t) = \prod_{t_{(i)} \leq t} \left(\frac{n-i}{n-i+1} \right)^{\delta_{(i)}} \quad (11.36)$$

这里约定 $\prod_{\emptyset} a_i = 1$, \emptyset 为空集。

平均寿命 $ET = \int_0^{+\infty} S(t) dt$, 故平均寿命时间可用 $\int_0^{+\infty} \hat{S}(t) dt$ 来估计,从而 ET 可用下式估计,即

$$ET \approx t_{(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{S}(t_{(i)}) (t_{(i+1)} - t_{(i)}) \quad (11.37)$$

例 11.3 某医院对 20 位病人手术后的生存时间(单位:年)进行了调查。记录如下:11,11,11+,7+,7,4,4+,12+,3,13,13+,13,13,16,15,15+,15,16,13,4(带+号者为右删失数据)。试用乘积限估计来估计生存函数和平均生存时间。

解: 将数据按从小到大排列为

3,4,4,4+,7,7+,11,11,11+,12+,13,13,13,13,13+,15,15,15+,16,16

根据前面的公式,得

$$\hat{S}(3) = \frac{19}{20} = 0.95, \quad \hat{S}(4) = 0.85, \quad \hat{S}(7) = 0.7969, \quad \hat{S}(11) = 0.6830$$

$$\hat{S}(12) = 0.6830, \quad \hat{S}(13) = 0.41, \quad \hat{S}(15) = 0.246, \quad S(16) = 0$$

于是

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3 \\ 0.95, & 3 \leq t < 4 \\ 0.85, & 4 \leq t < 7 \\ 0.797, & 7 \leq t < 11 \\ 0.683, & 11 \leq t < 12 \\ 0.683, & 12 \leq t < 13 \\ 0.41, & 13 \leq t < 15 \\ 0.246, & 15 \leq t < 16 \\ 0, & t \geq 16 \end{cases}$$

利用式(11.37)计算得到平均生存时间为 12.12 年。

1980 年以来,对于乘积限估计的理论基础已有大量研究。可以证明,在相当广泛的条件下,只要样本量足够大, $\hat{S}(t)$ 可与 $S(t)$ 任意接近。当然,除了寿命表法与乘积限估计外,还有

针对分组数据等不同截尾数据情形的非参数估计方法,比如 Turnbull 估计等,感兴趣的读者可查阅参考文献[4]。

习 题

11.1 50 个产品在某时刻有 6 个失效。试用 F 分布法计算置信度为 90 % 的可靠度置信区间。

11.2 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立同分布,是来自总体分布 $F(x)$ (密度函数 $f(x)$) 的样本,样本顺序统计量记为 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$,求样本极差 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 的分布密度。

11.3 在例 11.2 中,对晶体管寿命分布的 $1/4$ 分位数 $\xi_{1/4}$ 作点估计,并计算其在 0.95 置信水平下的单侧下限。

11.4 对一批电器元件,抽取 24 只做加速寿命试验,测得 24 个元件的寿命数据(单位:h)为 575,778,880,969,984,1 003,1 008,1 021,1 031,1 034,1 053,1 054,1 226,1 393,1 439,1 480,1 513,1 611,1 612,1 612,1 624,1 627,1 631,1 768。求这批元件寿命分布的中位数的 0.95 置信水平的区间估计。

第 12 章 无故障数据分析

随着科学的发展与技术的进步,产品的质量和可靠性日益提高,因此,高可靠性的产品在试验及使用中经常出现无故障的情况。产品在有故障情形下的数据处理已有一套成熟的方法,但无故障情形下的数据处理仍处于研究和探讨阶段。

无故障数据的分析,受到了工程界和统计学者的广泛重视与研究,取得了不少进展,陈家鼎等(1995)关于无失效数据情形下置信限的讨论是其中代表性的成果。

本章主要讨论在产品寿命分布类型已知时的定时截尾情形下,无故障数据的可靠度(或可靠寿命)的置信下限;同时讨论威布尔分布已知形状参数 m 时,特征寿命 η 的点估计问题;至于分布未知的情形,只简单给出可靠度的经典置信下限。

设随机变量 T 表示产品寿命,其分布函数为 $F(t; \theta)$, 其中 θ 是未知参数。设 $g(\theta)$ 是 θ 的广义实值函数。若有 n 个产品,其寿命分别为 T_1, T_2, \dots, T_n , 对于给定的 n 个截尾试验时间 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, 并定义观测示性特征量 δ 如下:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & T_i > \tau_i (\text{截尾}) \\ 1, & T_i \leq \tau_i (\text{故障发生}) \end{cases}$$

则在上述截尾试验下能观测到的试验数据为

$$Z = (t_1, \delta_1, \dots, t_n, \delta_n)$$

其中, $t_i = \min(T_i, \tau_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$)。在产品无故障时, $\delta_i = 0, i=1, 2, \dots, n$, 则

$$Z^0 = (t_1, 0, \dots, t_n, 0)$$

这种定时截尾试验可看作逐次定时截尾试验。利用 T 的概率密度函数 $f(t; \theta)$ 和可靠度函数 $R(t; \theta)$, 可得到无故障数据情形下的似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n R(t_i; \theta) = \prod_{i=1}^n [1 - F(t_i; \theta)] \quad (12.1)$$

对于给定的 n 个截尾试验时间 t_1, t_2, \dots, t_n , 得到观测值 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, 现说明如何根据观测结果给出参数函数 $g(\theta)$ 的最优置信下限。为叙述方便, 下面先给出几个定义。

定义 12.1 设 $y(Z)$ 是 $g(\theta)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限, 如果对任意 Z , 有

$$y(Z) \leq y(Z^0)$$

则称 $y(Z)$ 是正则的。

对于可靠度、可靠寿命等可靠性指标来说, 正则性自然满足, 因为无故障情形下的置信下限不会小于同一置信水平下有故障情形的置信下限。

定义 12.2 设 $y^*(Z^0)$ 是 $g(\theta)$ 的 $1-\alpha$ 置信水平的最优正则置信下限, 则对任何 $1-\alpha$ 置

信水平的正则下限 $y(Z^0)$ 均有

$$y(Z^0) \leq y^*(Z^0)$$

陈家鼎等(1995)证明了 $g(\theta)$ 的 $1-\alpha$ 置信水平的最优正则置信下限 $y^*(Z^0)$ 存在, 且

$$y^*(Z^0) = \inf \left\{ g(\theta) : \theta \in \Theta \text{ 且 } \prod_{i=1}^n R(t_i; \theta) > \alpha \right\} \quad (12.2)$$

其中, Θ 指 θ 的取值空间。

在无故障情形下, $y^*(Z^0)$ 是 $g(\theta)$ 的 $1-\alpha$ 置信水平的最优置信下限, 其值可由式(12.2)计算。这是一个普遍公式, 适用于常见的寿命分布。下面对常见的寿命分布分别进行叙述。

12.1 指数分布下无故障数据的分析

设产品的寿命分布为

$$F(t; \theta) = 1 - e^{-t/\theta}, \quad t > 0$$

现从一批产品中任取 n 个进行定时截尾试验, 到规定任务时间停止试验并未发现产品故障, 产品的工作时间依次为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ 。

1. 平均寿命 θ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

由式(12.2)可得 θ 的最优置信下限为

$$\theta_L = \inf \left\{ \theta : \prod_{i=1}^n R(t_i; \theta) > \alpha \right\}$$

即

$$\prod_{i=1}^n R(t_i; \theta) = \alpha \Rightarrow \prod_{i=1}^n e^{-t_i/\theta} = \alpha$$

则平均寿命 θ 在 $1-\alpha$ 水平下的最优置信下限为

$$\theta_L = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{-\ln \alpha} \quad (12.3)$$

2. 可靠度 $R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

由式(12.2)可推出可靠度 $R(t)$ 的置信下限为

$$R_L(t) = \alpha^{t / \sum_{i=1}^n t_i} \quad (12.4)$$

3. 可靠寿命 $t(R)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

当可靠度为 R 时, 可靠寿命的单侧置信下限为

$$t_L(R) = \frac{\ln R}{\ln \alpha} \sum_{i=1}^n t_i \quad (12.5)$$

例 12.1 设产品的寿命服从指数分布, 现随机抽取 8 个, 数据如表 12.1 所列。试求置信水平

为 0.80 时,平均寿命 θ 及储存 3 年后的可靠度以及可靠度为 0.9 时可靠寿命的置信下限。

表 12.1 某产品储存寿命试验结果

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8
储存 t_i /年	2	3.5	3	4	2.5	1.5	2	2.5
试验结果	合格	合格	合格	合格	合格	合格	合格	合格

解：已知 $1-\alpha=0.8, \alpha=0.2, n=8$, 由式(12.3)可得平均寿命 θ 的置信下限为

$$\theta_L = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{-\ln 0.20} = \frac{21}{1.609} \text{ 年} = 13.05 \text{ 年}$$

由式(12.4)可得储存 3 年后可靠度的置信下限为

$$R_L(3) = \exp\left(3\ln 0.2 / \sum_{i=1}^n t_i\right) = \exp[3 \times (-1.6095)/21] = 0.795$$

由式(12.5)可得可靠度为 0.9 的可靠寿命置信下限为

$$t_L(0.9) = \frac{\ln 0.9}{\ln 0.2} \sum_{i=1}^n t_i = 1.37 \text{ 年}$$

有时用 $1-\alpha=0.5$ 水平下的置信下限作为产品指标的点估计, 因为 $\alpha=0.5$ 时, 置信下限有一半的可能性小于真值, 一半的可能性大于真值。

12.2 威布尔分布下无故障数据的分析

设产品寿命分布函数为

$$F(t; m, \eta) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}, \quad m > 0, \quad \eta > 0$$

其中, m 为形状参数, η 为特征寿命(尺度参数)。

12.2.1 形状参数已知时的可靠性分析

在威伯斯法分析中假设形状参数 m 已知, 然后求出产品的特征寿命 η 。形状参数 m 根据工程经验和历史数据来确定, 如过去的故障数据及产品故障的失效机理等。

下面推导威伯斯方程。设 n 个产品工作时间为 t_1, t_2, \dots, t_n 。假设

$$l_i = t_i^m, \quad \theta = \eta^m, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则威布尔分布函数可写为

$$F(l; \theta) = 1 - e^{-l/\theta}, \quad \theta > 0$$

即指数分布的分布函数。也就是说, 如果 t_1, t_2, \dots, t_n 服从形状参数为 m 与特征寿命为 η 的威布尔分布, 经过变量变换后, 可用试验时间为 l_1, l_2, \dots, l_n 与平均寿命为 θ 的指数分布表示。

若 n 个产品工作了 t_1, t_2, \dots, t_n 时间没有出现故障, 则可按无故障情形下产品工作时间为 l_1, l_2, \dots, l_n 的指数分布来处理。由式(12.3)可得平均寿命 θ 的 $1-\alpha$ 水平的单侧置信下限为

$$\theta_L = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{-\ln \alpha}$$

将 $l_i = t_i^m, \theta = \eta^m$ 代入上式可得威布尔分布的特征寿命 η 的 $1-\alpha$ 单侧置信下限为

$$\eta_L = \left[\sum_{i=1}^n t_i^m / (-\ln \alpha) \right]^{1/m} \quad (12.6)$$

对产品有故障的截尾寿命试验, 由极大似然估计得到的特征寿命为

$$\hat{\eta} = \left[\sum_{i=1}^n t_i^m / r \right]^{1/m} \quad (12.7)$$

其中, n 为试验产品个数, r 为故障数, m 为形状参数, t_i 为第 i 个产品的试验时间。

若 n 个产品定时截尾寿命试验没有出现故障, 为估计产品寿命分布的特征寿命值, 威伯斯假设第一个故障马上就要出现, 即假设 $r=1$ 。威伯斯法中 η 的点估计为

$$\hat{\eta} = \left[\sum_{i=1}^n t_i^m / 1 \right]^{1/m} \quad (12.8)$$

其中, n 为试验产品个数, m 为形状参数, t_i 为第 i 个产品的试验时间。

比较式(12.6)和式(12.8)可知, η 的威伯斯估计值 $\hat{\eta}$ 相当于式(12.6)中取 $-\ln \alpha = 1.0$ 的情形, 而

$$-\ln \alpha = 1.0 \Leftrightarrow \alpha = e^{-1.0} \Leftrightarrow \alpha = 0.368$$

所以, 威伯斯点估计 $\hat{\eta}$ 实际上是 η 的置信度为 $100(1-0.368)\% = 63.2\%$ 的置信下限, 显然威伯斯估计是保守的。

威贝斯特提出用 $r=0.693$ 代替 $r=1.0$ 的方法, 实际上用特征寿命的 $1-\alpha=0.5$ 水平的置信下限作为特征寿命 η 的点估计, 该方法称为威贝斯特法, 即

$$\hat{\eta} = \left[\sum_{i=1}^n t_i^m / (-\ln 0.5) \right]^{1/m} = \left[\sum_{i=1}^n t_i^m / 0.693 \right]^{1/m} \quad (12.9)$$

例 12.2 在一大批发动机使用的压气机中出现 20 叶片故障, 威布尔分析给出 $m=5.0, \hat{\eta}_0 = 2\,132$ h。现重新设计的压气机在发动机试验中分别试验了 1 600 h, 1 800 h 和 3 200 h 而未出现故障, 试问这些试验时间是否足够验证这个重新设计的方案。

解: 用威伯斯法, 由式(12.8)得

$$\hat{\eta} = \left(\frac{1\,600^5 + 1\,800^5 + 3\,200^5}{3} \right)^{1/5} \text{ h} = 3\,490 \text{ h}$$

显然重新设计的 $\hat{\eta} \gg \hat{\eta}_0$, 并且威伯斯估计是保守的, 所以这些试验时间足以说明这个重新设计方案的有效性。

威伯斯法的使用应注意 m 假设的正确性。如对 m 值一无所知,则不能使用上述方法。

12.2.2 形状参数未知时的可靠性分析

产品在使用或试验时,有时会出现无故障情形,这些产品的使用时间(即截尾时间)一般不相同;同时人们对这些产品的寿命分布函数也可能不了解。如何根据产品的使用情况来评估产品的可靠性?这也是人们关心的问题。

设有 n 个产品,外场工作时间为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ 时未发现故障,其寿命分布函数为

$$F(t; m, \eta) = 1 - e^{-(t/\eta)^m}$$

其中, m 为形状参数, $0 < m_1 \leq m \leq m_2$, 并且 m_1, m_2 是两个已知数, η 为特征寿命, $\eta > 0$ 。在工程实践中,威布尔分布的形状参数 m 一般不大于 10, 因此可给出形状参数 m 的一个界限, 如设 $0 < m_1 \leq m \leq m_2$, 这在工程上是可以实现的。

1. 可靠度 $R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

由式(12.2)得 $R(t)$ 的最优置信下限为

$$R_L(t) = \inf \left\{ R(t) : \prod_{i=1}^n R(t_i) > \alpha \right\}$$

即

$$\prod_{i=1}^n e^{-(t_i/\eta)^m} = \alpha$$

则

$$R_L(t) = \alpha^{\hat{t}^m / \sum_{i=1}^n \hat{t}_i^m}, \quad t^* < t < t_n \quad (12.10)$$

其中, $t^* = \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{1/n}$, \hat{m} 由下述方程得到, 即

$$\sum_{i=1}^n (t_i/t)^m \ln(t_i/t) = 0, \quad m > 0 \quad (12.11)$$

若方程(12.11)的解为 m^* , 当 $m^* < m_1$ 时, 取 $\hat{m} = m_1$; 当 $m^* > m_2$ 时, 取 $\hat{m} = m_2$; 当 $m_1 \leq m^* \leq m_2$ 时, 取 $\hat{m} = m^*$ 。若方程(12.11)无解, 当 $t > t_n$ 时, 取 $\hat{m} = m_2$; 当 $t < \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{1/n}$ 时, 取 $\hat{m} = m_1$ 。

所以, 在 $\eta > 0, m_1 \leq m \leq m_2$ 时, 无故障数据情形下, $R(t)$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的置信下限为

$$R_L(t) = \begin{cases} \alpha^a, & t \leq t^* \\ \alpha^b, & t \geq t_n \\ \alpha^a, & t^* < t < t_n, \quad m^* < m_1 \\ \alpha^b, & t^* < t < t_n, \quad m^* > m_2 \\ \alpha^{\left(\hat{t}^m / \sum_{i=1}^n \hat{t}_i^m \right)}, & t^* < t < t_n, \quad m_1 \leq m^* \leq m_2 \end{cases} \quad (12.12)$$

其中, $a = t^{m_1} / \sum_{i=1}^n t_i^{m_1}$, $b = t^{m_2} / \sum_{i=1}^n t_i^{m_2}$, m^* 是方程(12.11)的根。

例 12.3 设某产品寿命服从威布尔分布, 其 m 值介于 1.0~10.0 之间。现随机抽取 4 台产品在外场使用, 分别使用到 120 h, 200 h, 360 h, 780 h 未发现故障, 求该产品在 0.8 的置信水平下, 在 600 h 时可靠度的置信下限。

解:

$$t^* = \left(\prod_{i=1}^4 t_i \right)^{1/4} = 287, \quad 287 < 600 < 780$$

由式(12.11)计算 m 的估计值, 即 m^* 是下式的根

$$G(m) = \sum_{i=1}^4 (t_i/t)^m \ln(t_i/t) = 0$$

使用二分法解之得

$$m^* = 1.846$$

将 m^* 代入式(12.12)得

$$R_L(600) = 0.2 \left(600^{1.846} / \sum_{i=1}^4 t_i^{1.846} \right) = 0.48$$

2. 可靠寿命 $t(R)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

设 $\eta > 0$, $m_1 \leq m \leq m_2$, 可靠度为 R , 由式(12.10)得

$$t_L(R) = \begin{cases} \varphi(m_1), & c \leq 1 \text{ 或者 } 1 < c \leq \frac{n}{p}, \quad m^* < m_1 \\ \varphi(m_2), & c > \frac{n}{p} > 1 \text{ 或者 } 1 < c \leq \frac{n}{p}, \quad m^* > m_2 \\ \varphi(m^*), & 1 < c \leq \frac{n}{p}, \quad m_1 \leq m^* \leq m_2 \end{cases} \quad (12.13)$$

其中, $c = n \ln R / \ln \alpha$, $\varphi(m) = \left(c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{1/m}$, p 为 n 个产品中截尾时间等于 t_n 的产品个数,

m^* 是下列方程的唯一解, 即

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n t_i^m} \sum_{i=1}^n t_i^m \ln t_i - \ln \left(c \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m \right)^{1/m} = 0 \quad (12.14)$$

例 12.4 设某产品寿命服从威布尔分布, 其 m 值大于 1.0 并小于 8, 现随机抽取 8 台产品在外场分别使用到 380 h, 480 h, 560 h, 650 h, 720 h, 800 h, 860 h, 960 h 未发现故障, 试求该产品在 0.80 置信水平时 R 为 0.80 的可靠寿命的置信下限。

解: 已知 $1-\alpha = 0.80$, $\alpha = 0.2$, $R = 0.8$, $1.0 \leq m \leq 8$, 则 $c = 8 \times \ln 0.8 / \ln 0.2 = 1.11$, 由式(12.14)求 m^* 的值, 即求下式的根

$$G(m) = \frac{1}{\sum_{i=1}^8 t_i^m} \sum_{i=1}^8 t_i^m \ln t_i - \ln \left(\frac{\ln 0.8}{\ln 0.2} \sum_{i=1}^8 t_i^m \right)^{1/m} = 0$$

使用二分法解之得

$$m^* = 1.73$$

将 m^* 代入式(12.13)得

$$t_L(0.8) = \left(\frac{\ln R}{\ln \alpha} \sum_{i=1}^n t_i^{m^*} \right)^{1/m^*} = \left(\frac{\ln 0.8}{\ln 0.2} \sum_{i=1}^n t_i^{1.73} \right)^{1/1.73} = 737 \text{ h}$$

12.3 正态分布和对数正态分布下无故障数据的分析

12.3.1 正态分布

正态分布的累积分布函数为

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^t e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

其中, μ 为均值, σ 为标准差。

设 n 个产品工作时间分别为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, 未发现故障。

1. 可靠度 $R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

由式(12.2)得

$$\prod_{i=1}^n \left[1 - \Phi \left(\frac{t_i - \mu}{\sigma} \right) \right] = \alpha$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 指标准正态分布的分布函数, 设 $u(\sigma) = \frac{\mu - t}{\sigma}$, 则

$$\prod_{i=1}^n \Phi \left(u(\sigma) + \frac{1}{\sigma} (t - t_i) \right) = \alpha \quad (12.15)$$

设 $-\infty < \mu < \infty, \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, 可靠度 $R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限为

$$R_L(t) = \begin{cases} \Phi(u(\sigma_1)), & t \geq t_n \\ \Phi(u(\sigma_2)), & t \leq \bar{t} \\ \Phi(u(\sigma_1)), & \bar{t} < t < t_n, \quad \sigma_0 < \sigma_1 \\ \Phi(u(\sigma_2)), & \bar{t} < t < t_n, \quad \sigma_0 > \sigma_2 \\ \Phi(u_0), & \bar{t} < t < t_n, \quad \sigma_1 \leq \sigma_0 \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (12.16)$$

$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$; $u(\sigma)$ 是方程(12.15)的解, 当 $\sigma = \sigma_1$ 或 $\sigma = \sigma_2$ 时, 用数值方法求解方程(12.15)的

解, 即得 $u(\sigma_1)$ 或 $u(\sigma_2)$; (u_0, σ_0) 是下列方程组的解

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\Phi' \left(u + \frac{1}{\sigma} (t - t_i) \right)}{\Phi \left(u + \frac{1}{\sigma} (t - t_i) \right)} \right\} (t - t_i) &= 0 \\ \prod_{i=1}^n \Phi \left(u + \frac{1}{\sigma} (t - t_i) \right) &= \alpha \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

2. 可靠寿命 $t(R)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

设 $-\infty < \mu < \infty, \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, 在无故障数据情形下可靠寿命 $t(R)$ 的置信下限为

$$t_L(R) = \begin{cases} \mu_1 - \mu_R \sigma_1, & \alpha \geq R^p \\ \mu_2 - u_R \sigma_2, & \alpha \leq R^n \\ \mu_1 - \mu_R \sigma_1, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma^* < \sigma_1 \\ \mu_2 - u_R \sigma_2, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma^* > \sigma_2 \\ u^* - u_R \sigma^*, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma \leq \sigma^* \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (12.18)$$

其中, u_R 指标准正态分布的 R 分位数; p 为 n 个产品中截尾时间等于 t_n 的产品个数; μ^*, σ^* 是下列方程组的解

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Phi \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right)} \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right) = u_R \sum_{i=1}^n \frac{\Phi \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right)} \quad (12.19)$$

$$\prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{\mu - t_i}{\sigma} \right) = \alpha \quad (12.20)$$

其中, μ_1 (或 μ_2) 是方程 (12.20) 的根, 当 $\sigma = \sigma_1$ 时, 由方程 (12.20) 求得 $\mu = \mu_1$; 当 $\sigma = \sigma_2$ 时, 可得 $\mu = \mu_2$ 。式 (12.19) 和式 (12.20) 是两个超越方程, 需要使用数值方法求解。

12.3.2 对数正态分布

设产品寿命分布函数为

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^t \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx = \Phi \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right)$$

其中, μ 为对数均值, σ 为对数标准差。

设 n 个产品工作时间分别为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, 未发现故障。作变换

$$x_i = \ln t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

易知产品的可靠度、可靠寿命分别为

$$R(t) = \Phi \left(\frac{\mu - \ln t}{\sigma} \right) \quad \text{与} \quad t(R) = \exp(\mu - u_R \sigma)$$

因此对数正态分布的可靠度、可靠寿命的置信下限, 经过简单变换后, 可直接利用正态分布方

法得到。

1. 可靠度 $R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

$$R_L(t) = \begin{cases} \Phi(u(\sigma_1)), & t \geq t_n \\ \Phi(u(\sigma_2)), & t \leq t_0 \\ \Phi(u(\sigma_1)), & t_0 < t < t_n, \quad \sigma_0 < \sigma_1 \\ \Phi(u(\sigma_2)), & t_0 < t < t_n, \quad \sigma_0 > \sigma_2 \\ \Phi(u_0), & t_0 < t < t_n, \quad \sigma_1 \leq \sigma_0 \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (12.21)$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 是标准正态分布函数, $t_0 = \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{1/n}$; 而 u_0, σ_0 是下列方程组的解

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\Phi' \left(u + \frac{1}{\sigma} (\ln t - \ln t_i) \right)}{\Phi \left(u + \frac{1}{\sigma} (\ln t - \ln t_i) \right)} \right\} (\ln t - \ln t_i) = 0 \quad (12.22)$$

$$\prod_{i=1}^n \Phi \left(u + \frac{1}{\sigma} (\ln t - \ln t_i) \right) = \alpha \quad (12.23)$$

$u(\sigma)$ 由方程(12.23)求得, 当 $\sigma = \sigma_1$ 时, 得 $u = u(\sigma_1)$; 当 $\sigma = \sigma_2$ 时, 得 $u = u(\sigma_2)$ 。

2. 可靠寿命 $t(R)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限

设 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, 可靠寿命 $t(R)$ 的 $1-\alpha$ 水平最优置信下限为

$$t_L(R) = \begin{cases} e^{\varphi(\sigma_1)}, & \alpha \geq R^p \\ e^{\varphi(\sigma_2)}, & \alpha \leq R^n \\ e^{\varphi(\sigma_1)}, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma^* < \sigma_1 \\ e^{\varphi(\sigma_2)}, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma^* > \sigma_2 \\ e^{\mu^* - u_R \sigma^*}, & R^n < \alpha < R^p, \quad \sigma_1 \leq \sigma^* \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (12.24)$$

其中, $\varphi(\sigma) = \mu(\sigma) - u_R \sigma$, u_R 指标准正态分布的 R 分位数; p 为 n 个产品中截尾时间等于 t_n 的产品个数; μ^*, σ^* 是下列方程组的解

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Phi' \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)} \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right) = u_R \sum_{i=1}^n \frac{\Phi' \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)} \quad (12.25)$$

$$\prod_{i=1}^n \Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right) = \alpha \quad (12.26)$$

$\mu(\sigma)$ 是方程(12.26)的根, 当 $\sigma = \sigma_1$ 时, 由方程(12.26)求得 $\mu = \mu(\sigma_1)$; 当 $\sigma = \sigma_2$ 时, 可得 $\mu = \mu(\sigma_2)$ 。式(12.25)和式(12.26)是两个超越方程, 需要使用数值方法求解。

例 12.5 已知半导体器件的寿命分布服从对数正态分布, 现抽 5 件产品进行定时截尾试验, 试验时间(单位:h)为 800, 1 096, 1 808, 1 998, 2 440, 均未出现故障。已知 $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 10$, 试

求置信水平 $1-\alpha=0.8$ 时, $t=1\ 780\text{ h}$ 时可靠度的置信下限。

解: $t_0 = \left(\prod_{i=1}^n t_i \right)^{1/n} = 1\ 505\text{ h}$, $t_n = 2\ 440\text{ h}$, $t_0 < t < t_n$, 由方程(12.22)和方程(12.23)求得 $\sigma_0 = 1$, $u_0 = 0.52$, 并代入式(12.21)得

$$R_L(1\ 780) = \Phi(0.52) = 0.70$$

例 12.6 已知直升机旋翼叶片的寿命服从对数正态分布, 现随机收集 5 架直升机旋翼叶片外场使用信息, 了解到其工作时间(单位: h)为 78, 148, 403, 493, 735, 并未出现故障, 已知 $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 10$, 试求置信水平 $1-\alpha=0.8$ 、可靠度为 0.7 的可靠寿命 $t(R)$ 的单侧置信下限。

解: $1-\alpha=0.80$, $\alpha=0.20$, $n=5$, $p=1$, $R^u=0.7^5 < \alpha=0.2 < R^p=0.7$, 由下述方程组求解 μ^* , σ^* , 即

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \frac{\Phi' \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)} \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right) &= 0.52 \times \sum_{i=1}^5 \frac{\Phi' \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)}{\Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right)} \\ \prod_{i=1}^5 \Phi \left(\frac{\mu - \ln t_i}{\sigma} \right) &= 0.2 \end{aligned} \right\}$$

用数值方法解之得 $\mu^* = 7$, $\sigma^* = 2$, 代入式(12.24)得

$$t_L(0.7) = e^{\mu^* - u_R \sigma^*} = e^{7 - 0.52 \times 2} = 388\text{ h}$$

12.4 分布未知时无故障数据的分析

在有些情况下, 很难确定产品的寿命分布类型, 有时虽然寿命分布类型已知, 但获得的数据仅仅是失效个数, 而无精确的失效时间, 这时可借助非参数方法获得可靠度的估计。

设某产品的寿命分布类型未知, 现从中随机抽取 n 个样品进行定时截尾试验, 若在截尾时间段内有 X 个样品失效, 又产品的失效与否相互独立, 则 X 是一个服从二项分布的随机变量, 于是有

$$P(X = r) = \binom{n}{r} R^{n-r} (1-R)^r, \quad r = 0, 1, \dots, n \quad (12.27)$$

其中, R 为可靠度。

这样研究可靠度的非参数估计问题, 就转化为研究二项分布式(12.27)中参数 R 的估计问题。而对于无失效数据情形, 即式(12.27)中的 $r=0$, 可靠度 R 的置信水平为 $1-\alpha$ 的经典置信下限为

$$R_L = \alpha^{1/n} \quad (12.28)$$

对于无失效情形的数据处理, 除了经典统计的结果以外, 近来还有很多贝叶斯方法的讨论, 感兴趣的读者可查阅相关的文献资料。

习 题

12.1 考察某台仪器的无故障工作时间(单位:h)12次,得数据如下:28,42,54,92,138,159,169,181,210,234,236,265。假定其寿命服从指数分布,试给出失效率 λ 的置信度为0.9的置信下限。

12.2 设产品的寿命服从指数分布,现随机抽7台产品进行定时截尾试验,试验时间(单位:h)分别为120,450,480,500,600,650,700,产品未产生任何故障,试求置信水平为0.90时的平均寿命 θ 的单侧置信下限。

12.3 设某产品寿命服从威布尔分布,其 m 值大于1.0并小于8,现随机抽取8台产品在外场分别使用到386 h,450 h,528 h,668 h,778 h,821 h,878 h,936 h未发现故障,试求该产品在0.90置信水平时 R 为0.90的可靠寿命的置信下限。

12.4 已知某种器件的寿命分布服从对数正态分布,现抽8件产品进行定时截尾试验,试验时间(单位:h)为780,1 066,1 356,1 678,1 808,1 998,2 236,2 440,均未出现故障。试求置信水平 $1-\alpha=0.7$ 时, $t=1 980$ h时可靠度的置信下限。

第 13 章 加速寿命试验及其统计分析

加速寿命试验,是指在保持失效机理不变的条件下,把样品放在高应力水平下进行试验,来加速样品失效的一种寿命试验方法。其目的在于快速获取试验数据,迅速查明失效原因,运用加速寿命试验模型,对产品在不同应力水平下的各种可靠性指标进行统计推断。

加速寿命试验的研究已有 50 年的历史。从 Levenbach(1957)发表的“电容器的加速寿命试验”开始,尤其是 20 世纪 70 年代以来,加速寿命试验方法受到统计学家和工程界的广泛重视,并在加速模型的研究、统计推断方法等方面取得了丰硕成果。目前,加速寿命试验已被广泛应用于解决实际问题之中。

加速寿命试验模型是利用加速寿命试验信息外推产品在不同应力水平下的各种可靠性指标的关键。对于许多产品,特别是电子产品,其加速寿命模型可以根据物理、化学原理得到,例如,当温度作为加速应力时,可以根据量子学的 Eyring 公式

$$\frac{dM}{dt} = CS \times e^{-\frac{E_a}{kT}}$$

得到加速寿命试验模型。其中, t 为时间, M 为化学反应总量, T 为热力学温度, C 为常数, S 为应力水平 E_a 为激活能, E_a/k 又称激活温度, $k=1.38 \times 10^{-23}$ J/K,称为波耳兹曼常数。

13.1 基本概念和基本模型

13.1.1 加速寿命试验的类型

加速寿命试验的类型很多,按照应力施加方式的不同,常用的有三种类型,即恒定应力加速寿命试验(简称恒加试验)、步进应力加速寿命试验(简称步加试验)和序进应力加速寿命试验(简称序加试验)。

1. 恒加试验

恒加试验是先选择一组加速应力水平: S_1, S_2, \dots, S_k ,它们都高于正常应力水平 S_0 ,即 $S_0 < S_1 < \dots < S_k$ 。然后,将全部样品分为 k 组,每组样品都在某个加速应力水平下进行寿命试验,直到规定的试验时间或各组均有一定数量的样品发生失效为止。图 13.1 所示为具有 4 个应力水平的恒加试验,图中“×”表示有一样品在该时刻失效。

2. 步加试验

步加试验是先选定一组加速应力水平: S_1, S_2, \dots, S_k ,并要求 $S_0 < S_1 < \dots < S_k$ 。试验开始

时,将所有的受试样品置于应力水平 S_1 下进行寿命试验,直到规定的试验时间 τ_1 或规定的失效数 r_1 为止;然后把应力水平提高到 S_2 ,将未失效的样品在应力水平 S_2 下继续进行寿命试验,如此继续下去,直到规定的试验时间或有一定数量的样品发生失效为止。图 13.2 所示为具有 4 个应力水平的步加试验。

3. 序加试验

序加试验与步加试验基本相同,不同之处在于所施加的加速应力水平是随着时间的增加而连续上升,最简单的是直线上升。图 13.3 是应力水平以两种不同速率上升的序加试验的示意图。

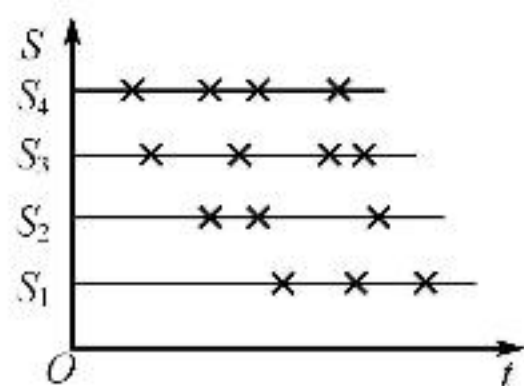


图 13.1 恒加试验示意图

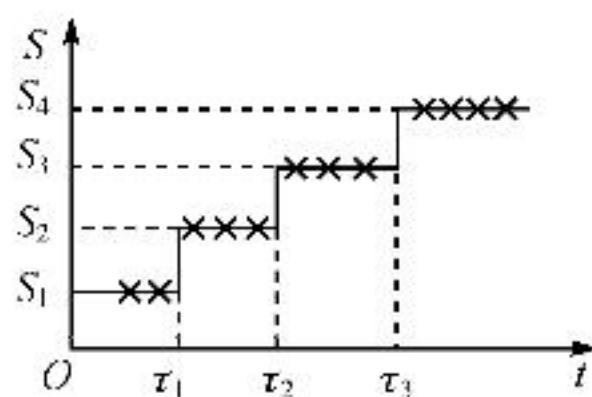


图 13.2 步加试验示意图

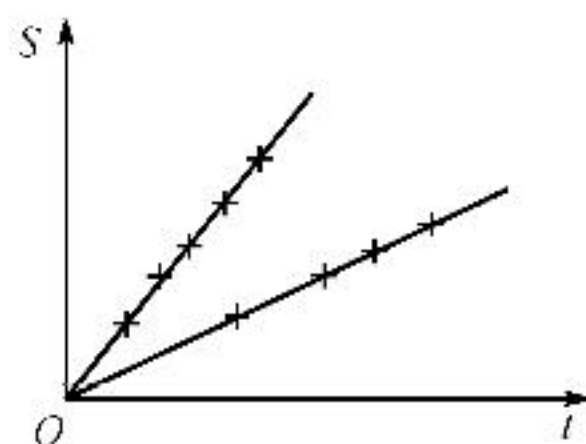


图 13.3 序加试验示意图

上述三种加速寿命试验各有优缺点。首先,从试验持续时间来看,恒加试验所需试验时间最长,步加试验与序加试验可使样品失效更快一些;其次,步加试验与序加试验可以减少受试样品数;最后,从试验实施和试验数据处理来看,恒加试验方法操作简单,数据处理方法较为成熟,所以实际中经常采用。我国已对恒加试验制定了国家标准 GB 2689.1~4—81。

13.1.2 加速模型与加速系数

加速寿命试验的基本思想是利用高应力水平下的寿命特征去外推正常应力水平下的寿命特征,实现这个基本思想的关键在于确定寿命特征与应力水平之间的关系。

寿命特征与应力水平之间的关系通常是非线性的。但如果对寿命数据或应力水平经过适当的变换,曲线有可能变成直线。由于直线不仅容易拟合,而且方便外推,所以在建立寿命特征与应力水平之间的关系时应尽量使之线性化。

1. 常用的加速模型

(1) 阿伦尼斯(Arrhenius)模型

在加速寿命试验中用温度作为加速应力是常见的,因为高温能使产品(如电子元器件、绝缘材料等)内部加快化学反应速度,促使产品快速失效。阿伦尼斯(1880)在研究了这类化学反应,在大量数据的基础上,提出了如下加速模型:

$$\xi = Ae^{E/kT} \quad (13.1)$$

其中, ξ 为某寿命特征,如平均寿命、中位寿命等; A 为与产品特性、几何形状、试验方法有关的正常数; E 为激活能,与材料有关,单位是电子伏特 eV; $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K, 为波耳兹曼常数,

T 为热力学温度。又称 E/k 为激活温度。阿伦尼斯模型表明:寿命特征随着温度的上升而呈指数下降趋势。对式(13.1)两边取对数,可得

$$\ln \xi = a + b/T \quad (13.2)$$

其中, $a = \ln A$, $b = E/k$ 。因此,寿命特征的对数是温度倒数的线性函数。

(2) 逆幂律模型

在加速寿命试验中用电应力(如电压、电流、电功率等)作为加速应力也是常见的。例如,加大电压能使产品快速失效。在物理上已被很多实验数据证实,产品的某些寿命特征与应力之间有如下的关系:

$$\xi = A\nu^{-c} \quad (13.3)$$

其中, ξ 为某寿命特征,如平均寿命、中位寿命等; A 是一个正常数, c 是一个与激活能有关的正常数, ν 是电应力,常取电压。上述关系称为逆幂律模型,它表示产品的某种寿命特征是电应力 ν 的负次幂函数。对该模型两边取对数,可得

$$\ln \xi = a + b \ln \nu \quad (13.4)$$

其中, $a = \ln A$, $b = -c$ 。因此,寿命特征的对数是电应力对数的线性函数。

阿伦尼斯模型和逆幂律模型是最常用的加速模型。它们的线性化形式可统一写成

$$\ln \xi = a + b \varphi(s) \quad (13.5)$$

其中, ξ 为某寿命特征, $\varphi(s)$ 为应力水平 s 的已知函数,当 s 为热力学温度时, $\varphi(s) = 1/s$; 当 s 为电压时, $\varphi(s) = \ln s$ 。上式中的 a, b 是待定参数,它们的估计需要从加速寿命试验的数据中获得。

这一统一的加速模型在常用寿命分布中的应用如下:

① 当产品的寿命服从参数为 θ 的指数分布时,常用平均寿命 θ 作为寿命特征,于是其加速模型为

$$\ln \theta = a + b \varphi(s)$$

② 当产品的寿命服从威布尔分布 $W(m, \eta)$ 时,常用特征寿命 η 作为寿命特征,于是其加速模型为

$$\ln \eta = a + b \varphi(s)$$

③ 当产品的寿命服从对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$ 时,常用中位寿命 $t_{0.5}$ 作为寿命特征,于是其加速模型为

$$\ln t_{0.5} = a + b \varphi(s)$$

通过加速寿命试验数据分析,获得加速模型中两个未知参数 a, b 的估计是加速寿命试验的关键之一。若记 a, b 的估计为 \hat{a} 与 \hat{b} ,则由加速模型,得

$$\ln \xi = \hat{a} + \hat{b} \varphi(s) \quad (13.6)$$

这样,可对正常应力水平 S_0 下的寿命特征 ξ 作出估计。

(3) 单应力艾林(Eyring)模型

在加速应力为温度时,常常还使用艾林模型作为加速方程,即

$$\xi = \frac{A}{T} e^{\frac{B}{kT}} \quad (13.7)$$

其中, A, B 为待定常数, k 为波耳兹曼常数, T 为热力学温度。艾林模型是根据量子力学理论导出的,它与阿伦尼斯模型只相差一个系数 A/T 。当热力学温度 T 的变化范围较小时, A/T 可近似看作常数,这时,艾林模型近似为阿伦尼斯模型。在很多场合下,可以使用这两个模型去拟合数据,并根据拟合好坏来决定选用哪个模型。

(4) 广义艾林模型

当温度和电应力同时作为加速应力时,可用以下的加速模型:

$$\xi = \frac{A}{T} e^{\frac{B}{kT}} e^{V(C + \frac{D}{kT})} \quad (13.8)$$

其中, A, B, C, D 为待定常数, k 为波耳兹曼常数, T 为热力学温度, V 为电应力。记 $\xi' = \xi T$, 然后对上式两边取对数,可得其线性化形式

$$\ln \xi' = a + b \varphi_1(T) + c \varphi_2(V) + d \varphi_1(T) \varphi_2(V) \quad (13.9)$$

其中, $a = \ln A, b = B/k, c = C, d = D/k, \varphi_1(T) = 1/T, \varphi_2(V) = V$ 。

(5) 指数型模型

美国军用标准 MIL-HDBK-217E(1986)对各种电容器的加速寿命试验建议使用以下指数型模型:

$$\xi = A e^{-BV} \quad (13.10)$$

其中, A, B 为待定常数, V 为非热量应力。例如,在电容器中, V 为电压。它的对数形式为

$$\ln \xi = a + b \ln V \quad (13.11)$$

其中, $a = \ln A, b = -B$ 。

(6) 多应力广义阿伦尼斯模型

多应力 S 的广义阿伦尼斯模型,也称多项式加速模型。其加速模型为

$$\xi = \exp[c_0 + c_1 \varphi_1(S_1) + \cdots + c_l \varphi_l(S_l)] \quad (13.12)$$

其中,应力 S 是 l 维的; c_0, c_1, \cdots, c_l 为待估常数; $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot), \cdots, \varphi_l(\cdot)$ 为已知函数。显然,广义艾林模型是多应力广义阿伦尼斯模型的特例。

2. 加速系数

加速系数,又称加速因子,是加速寿命试验的一个重要参数,实际中常要用到。它是正常应力下某种寿命特征与加速应力相应寿命特征之比,其具体定义如下:

定义 13.1 设某产品在正常应力水平 S_0 的失效分布函数为 $F_0(t)$, 记 $t_{p,0}$ 为其 p 分位寿命,即 $F_0(t_{p,0}) = p$ 。又设此产品在加速应力水平 S_i 下的失效分布函数为 $F_i(t)$, 记 $t_{p,i}$ 为其 p 分位寿命,则两个 p 分位寿命之比

$$\frac{t_{p,0}}{t_{p,i}} = \tau_{S_i \sim S_0} \quad (13.13)$$

称为加速应力水平 S_i 对正常应力水平 S_0 的 p 分位寿命的加速系数,简称 S_i 对 S_0 的加速系数。在不引起误解的情形下,简称加速系数或加速因子。

加速系数的用处很多,可以用在产品的可靠性筛选与可靠性验收以及产品质量改进措施的鉴定等方面。

例 13.1 某种器件在过去恒定电压加速寿命试验中算得中位寿命的加速系数为

$$\tau_{V_1 \sim V_0} = 1.66 \times 10^4$$

其中, $V_0 = 10 \text{ kV}$, $V_1 = 26 \text{ kV}$, 如果有一种器件与上述器件同类型。现想知道该器件在 $V_0 = 10 \text{ kV}$ 负荷下的中位寿命是多少。

首先在高压 $V_1 = 26 \text{ kV}$ 下安排一组寿命试验,测得其中位寿命为 700 min , 即 $t_{0.5,1} = 700 \text{ min}$ 。由加速系数可以算得

$$\begin{aligned} t_{0.5,0} &= \tau_{V_1 \sim V_0} \times t_{0.5,1} = 1.66 \times 10^4 \times 700 \text{ min} = \\ &1.937 \times 10^5 \text{ h} = 8\,071 \text{ 天} = 22.1 \text{ 年} \end{aligned}$$

这说明,该器件在 $V_0 = 10 \text{ kV}$ 下的中位寿命大约为 22 年。

下面介绍几种常用分布下的加速系数。

(1) 威布尔分布下的加速系数

设在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 S_i 下产品的寿命 T_i 都服从威布尔分布,其失效分布函数为

$$F_i(t) = 1 - e^{-(t/\eta_i)^{m_i}}, \quad t > 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

其中, $m_i > 0$ 为形状参数, $\eta_i > 0$ 为特征寿命。在威布尔分布场合,特征寿命 η_i 就是 $p = 1 - e^{-1} = 0.632$ 的分位寿命,因此在威布尔分布场合,常用两个特征寿命之比来确定加速系数,即 $\tau_{S_i \sim S_0} = \eta_0 / \eta_i$ 。

在加速寿命试验中,常假设其形状参数 m_i 不随应力水平变化而变化,即 $m_0 = m_i = m$ 。这时上述加速系数又可用两平均寿命之比来计算。特别地,在指数分布场合下,其平均寿命就是其特征寿命,而失效率是平均寿命的倒数,所以其 S_i 对 S_0 的加速系数常定义为

$$\tau_{S_i \sim S_0} = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad (13.14)$$

其中, θ_i 与 λ_i 分别为指数分布的平均寿命与失效率。

(2) 对数正态分布下的加速系数

设在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 S_i 下产品的寿命 T_i 都服从对数正态分布,其失效密度函数为

$$f_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i t} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln t - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2}, \quad t > 0, \quad i = 0, 1, \dots$$

其中, μ_i 为对数均值, $\sigma_i > 0$ 为对数标准差。由于这两个参数都不是某个 p 的分位寿命, 因此在实际中, 常用两个中位寿命 ($p=0.5$) 的加速系数作为对数正态分布下的加速系数, 即

$$\tau_{S_i \sim S_0} = \frac{t_{0.5,0}}{t_{0.5,i}} \quad (13.15)$$

在加速寿命试验中, 常假设其对数标准差 σ_i 不随应力水平变化而变化, 即 $\sigma_0 = \sigma_i = \sigma$, 这时上述加速系数也可用平均寿命之比计算。这是因为对数正态分布的 p 分位寿命 $t_{p,i}$ 满足

$$\Phi\left(\frac{\ln t_{p,i} - \mu_i}{\sigma_i}\right) = p, \quad i = 0, 1, \dots$$

其中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数, 其 p 分位寿命记为 u_p , 则有

$$\ln t_{p,i} = \mu_i + \sigma_i u_p, \quad i = 0, 1, \dots$$

在 $\sigma_0 = \sigma_i = \sigma$ 条件下, 有

$$\frac{t_{p,0}}{t_{p,i}} = \frac{e^{\mu_0 + \sigma u_p}}{e^{\mu_i + \sigma u_p}} = \frac{e^{\mu_0}}{e^{\mu_i}} = \frac{e^{\mu_0 + \sigma^2/2}}{e^{\mu_i + \sigma^2/2}} = \frac{E(T_0)}{E(T_i)} \quad (13.16)$$

上述等式表明, 在对数正态分布场合, 只要其标准差相同, 则两个 p 分位寿命之比就不会随 p 的改变而改变, 且此比值等于它们的平均寿命之比。

13.2 恒定应力加速寿命试验

对于恒定应力加速寿命试验, 设正常应力水平为 S_0 , k 个加速应力水平为 S_1, S_2, \dots, S_k , 并且 $S_0 < S_1 < \dots < S_k$ 。从一批产品中随机抽取 n 个样品, 并分为 k 个样本, 各个样本的样本量分别为 n_1, n_2, \dots, n_k , 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ 。将第 i 个样本放在加速应力水平 S_i 下进行截尾寿命试验, 设 n_i 个样品中有 r_i 个失效, 其失效时间依次为

$$t_{i1} \leq t_{i2} \leq \dots \leq t_{ir_i} \leq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.17)$$

其中, τ_i 为在应力水平 S_i 下寿命试验的截尾时间, 如果是定数截尾试验, 则 $\tau_i = t_{ir_i}$ 。在应力水平 S_i 下的总试验时间 $T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)\tau_i$, 如果是定数截尾, 则 $T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{ir_i}$ 。下面分别介绍指数分布、威布尔分布和对数正态分布场合下恒加试验数据的统计分析。

13.2.1 指数分布场合下恒加试验数据的统计分析

1. 基本假定

指数分布场合下恒加试验数据的统计分析是在以下两个假定下进行的。

假定 I 在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_k 下, 产品的寿命服从指数分布, 相应的失效率为 $\lambda_i (i=0, 1, \dots, k)$ 。

假定 II 产品的平均寿命 $\theta_i = 1/\lambda_i$ 与加速应力水平 S_i 满足如下的加速模型:

$$\ln \theta_i = a + b \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.18)$$

其中, a 和 b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 是已知函数。为方便起见, 记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i), i=0, 1, \dots, k$ 。

对于很多产品(尤其是电子产品)的恒加试验, 这两个假定是合理的, 也是容易满足的。假定 I 的合理性可以用拟合优度检验或图形方法来验证。对于常用的加速应力(如温度、电压等), 假定 II 的成立可以利用专业知识和工程经验来判断。在上述假定下, 就可以研究恒加试验数据的各种统计推断。

指数分布场合下恒加试验数据的统计分析, 通常分三步:

① 用各应力水平 S_i 下的试验数据, 设法获得加速方程中参数 a 和 b 的点估计 \hat{a}_i 和 $\hat{b}_i, i=1, 2, \dots, k$ 。

② 根据假定 II, 得到正常应力水平 S_0 下的平均寿命 θ_0 的点估计。

③ 根据假定 I, 获得正常应力水平 S_0 下指数分布的失效率 λ_0 , 从而得出正常应力水平 S_0 下各种可靠性指标的估计。

容易看出, 统计分析的关键是步骤①。下面介绍定数截尾样本和定时截尾样本下的点估计和区间估计。

2. 定数截尾样本下的点估计

在恒加试验中, 加速应力水平 S_i 下进行定数截尾寿命试验的总试验时间

$$T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)t_{ir_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

服从伽马分布 $\Gamma(r_i, 1/\theta_i)$, 并且 $E(T_i) = r_i\theta_i, \text{var}(T_i) = r_i\theta_i^2$ 。利用伽马分布的性质可计算 $\ln T_i$ 的期望与方差, 它们分别是

$$E(\ln T_i) = \ln \theta_i + \Psi(r_i) \quad (13.19)$$

$$\text{var}(\ln T_i) = \xi(2, r_i - 1) \quad (13.20)$$

其中, $\Psi(x)$ 与 $\xi(2, x-1)$ 是两个特殊函数, 在 x 为正整数时, 有

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{x-1} i^{-1} - \gamma, \quad \xi(2, x-1) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{i=1}^{x-2} i^{-2}$$

$$\gamma = 0.577\ 215\ 664 \cdots (\text{欧拉常数})$$

$\Psi(x)$ 与 $\xi(2, x-1)$ 的值可以查特殊函数表。若令 $\delta_i \triangleq \ln T_i - \Psi(r_i), \xi_i \triangleq \xi(2, r_i - 1)$, 利用高斯-马尔可夫定理, 可得加速寿命方程中 a 和 b 的无偏估计:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{GH - IM}{EG - I^2} \\ \hat{b} &= \frac{EM - IH}{EG - I^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

其中

$$E = \sum_{i=1}^k \xi_i^{-1}, \quad I = \sum_{i=1}^k \xi_i^{-1} \varphi_i, \quad M = \sum_{i=1}^k \xi_i^{-1} \varphi_i \delta_i$$

$$G = \sum_{i=1}^k \xi_i^{-1} \varphi_i^2, \quad H = \sum_{i=1}^k \xi_i^{-1} \delta_i$$

而 \hat{a} 与 \hat{b} 的方差和协方差分别为

$$\text{var}(\hat{a}) = \frac{G}{EG - I^2}, \quad \text{var}(\hat{b}) = \frac{E}{EG - I^2}, \quad \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-I}{EG - I^2} \quad (13.22)$$

再利用加速方程, 可得正常应力水平 S_0 下可靠性指标的点估计:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}_0 &= e^{\hat{a} + \hat{b}\varphi_0}, \quad \hat{\lambda}_0 = 1/\hat{\theta}_0 \\ \hat{R}_0(t) &= e^{-\hat{\lambda}_0 t}, \quad \hat{\tau}_{S_i \sim S_0} = e^{\hat{b}(\varphi_0 - \varphi_i)} \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

例 13.2 某产品的平均寿命为 5×10^4 h。改进设计后平均寿命有显著提高。为评定新产品在工作电压 10 V 下的平均寿命, 特组织了一次恒加试验。所选的 4 个加速电压水平、样本量和失效数都在表 13.1 中列出。按这些条件分别进行定数截尾寿命试验, 所得失效时间也列在表 13.1 中。经分布检验, 都认为这 4 个样本分别来自不同的指数分布, 检验统计量 χ^2 的值及其判据也列在表 13.1 中。在此基础上, 计算诸 $\ln \theta_i$ 的无偏估计 δ_i , 结果列在表 13.1 中。

加速模型中参数 a 和 b 的估计值按式(13.21)计算。首先计算 ξ_i 的值, $\xi_1 = \xi_2 = 0.1052$, $\xi_3 = 0.0689$, $\xi_4 = 0.0513$, 由此可计算

$$E = \sum_{i=1}^4 \xi_i^{-1} = 53.0298, \quad I = \sum_{i=1}^4 \xi_i^{-1} \ln S_i = 169.2807$$

$$G = \sum_{i=1}^4 \xi_i^{-1} (\ln S_i)^2 = 546.0511, \quad H = \sum_{i=1}^4 \xi_i^{-1} \delta_i = 368.4281$$

$$M = \sum_{i=1}^4 \xi_i^{-1} (\ln S_i) \delta_i = 1146.8353$$

可得

$$\hat{a} = \frac{GH - IM}{EG - I^2} = \frac{7043.4869}{301.0252} = 23.3983$$

$$\hat{b} = \frac{EM - IH}{EG - I^2} = \frac{-5551.3201}{301.0252} = -5.1535$$

加速模型为

$$\ln \hat{\theta} = 23.3983 - 5.1535 \ln S$$

在正常工作电压 $S_0 = 10$ V 下, 平均寿命的估计值为

$$\hat{\theta}_0 = e^{23.3983 - 5.1535 \ln 10} = 102020 \text{ h} = 11.65 \text{ 年}$$

这意味着,改进产品设计后,平均寿命由 5×10^4 h 左右提高到 10×10^4 h,提高了 1 倍。同时可算得各在正常工作电压水平 $S_0=10$ V 下可靠性指标的估计值。如失效率

$$\hat{\lambda}_0 = 1/\hat{\theta}_0 = 9.802 \times 10^{-6} \text{ h}^{-1}$$

在 $t=10\ 000$ h 的可靠度

$$\hat{R}(10\ 000) = e^{-10\ 000/\hat{\theta}} = 0.906\ 6$$

这表明新产品中有 90 % 的产品寿命超过 10 000 h。

最后计算加速系数的估计值。由式(13.23)可计算 S_i 对 S_0 的加速系数估计

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{S_1\sim S_0} &= e^{b(\ln S_0 - \ln S_1)} = 9.08, & \hat{\tau}_{S_2\sim S_0} &= e^{b(\ln S_0 - \ln S_2)} = 20.68 \\ \hat{\tau}_{S_3\sim S_0} &= e^{b(\ln S_0 - \ln S_3)} = 112.40, & \hat{\tau}_{S_4\sim S_0} &= e^{b(\ln S_0 - \ln S_4)} = 636.58 \end{aligned}$$

表 13.1 恒定电压加速寿命试验数据

I	试验条件	$S_1=15$	$S_2=18$	$S_3=25$	$S_4=35$
		$n_1=30$ $r_1=10$	$n_2=30$ $r_2=10$	$n_3=20$ $r_3=15$	$n_4=20$ $r_4=20$
II	失效时间 t_{ij} /h	243	50	56	11
		547	254	85	35
		628	342	145	42
		697	535	176	49
		917	818	423	51
		2 245	1 044	439	55
		2 997	1 318	498	65
		3 001	1 531	735	89
		3 133	1 671	763	98
		3 820	2 025	833	100
				890	113
				987	130
				1 105	133
				1 391	133
				1 547	133
					158
					171
					208
					219
					734

Ⅲ	分布检验	$d_i = r_i - 1$	9	9	14
		$\chi^2_{0.95}(2d)$	9.390	9.390	16.928
		$\chi^2_{0.05}(2d)$	28.869	28.869	41.337
		χ^2	19.313	20.772	26.503
Ⅳ	参数估计	T^*	94.668	50.088	17.805
		$\ln T^*$	11.458 1	10.821 5	9.787 2
		$\Psi(r_i)$	2.251 8	2.251 8	2.674 2
		δ_i	9.206 3	8.569 7	7.113 0

3. 定数截尾样本下的区间估计

由加速模型获得的 $\ln \hat{\theta}_0$ 是 $\ln \theta_0$ 的无偏估计, 即 $E(\ln \hat{\theta}_0) = \ln \theta_0$, 但 $\ln \hat{\theta}_0$ 的分布很难精确求得, 只能采用近似方法。常用的方法是用一个正态分布去近似 $\ln \hat{\theta}_0$ 的分布, 使得这两个分布的数学期望和方差分别相等, 即认为

$$\ln \hat{\theta}_0 \sim AN(\ln \theta_0, \sigma_0^2) \quad (13.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \text{var}(\ln \hat{\theta}_0) = \text{var}(\hat{a} + \hat{b} \varphi_0) = \\ &\text{var}(\hat{a}) + \varphi_0^2 \text{var}(\hat{b}) + 2\varphi_0 \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{G + \varphi_0^2 E - 2\varphi_0 I}{EG - I^2} \end{aligned} \quad (13.25)$$

这里 $\varphi_0 = \varphi(S_0)$, 而 $\text{var}(\hat{a})$, $\text{var}(\hat{b})$ 和 $\text{cov}(\hat{a}, \hat{b})$ 利用了式(13.22)。

利用上述近似正态分布, 对给定的置信水平 $1-\alpha$, 有

$$P\left(u_{\alpha/2} \leq \frac{\ln \hat{\theta}_0 - \ln \theta_0}{\sigma_0} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

由此获得 θ_0 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$P\left(\hat{\theta}_0 e^{\sigma_0 u_{\alpha/2}} \leq \theta_0 \leq \hat{\theta}_0 e^{\sigma_0 u_{1-\alpha/2}}\right) = 1 - \alpha \quad (13.26)$$

相应的 θ_0 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限为

$$P\left(\theta_0 \geq \hat{\theta}_0 e^{\sigma_0 u_{\alpha}}\right) = 1 - \alpha \quad (13.27)$$

为方便起见, 把根据加速模型得到的正常应力水平下的各种可靠性指标估计列于表13.2中。在表13.2中, $\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 u_{1-\alpha/2}$, $\gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 u_{1-\alpha}$, $\sigma_i^2 \stackrel{\text{def}}{=} E(\varphi_0 - \varphi_i)^2 / (EG - I^2)$, $i=1, 2, \dots, k$ 。

表 13.2 定数截尾样本下的置信区间与置信限(置信水平为 $1-\alpha$)

可靠性指标	置信区间	置信限
平均寿命 θ_0	$(\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_1}, \hat{\theta}_0 e^{\gamma_1})$	$\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_2}$ (下限)
失效率 λ_0	$(\hat{\theta}_0^{-1} e^{-\gamma_1}, \hat{\theta}_0^{-1} e^{\gamma_1})$	$\hat{\theta}_0^{-1} e^{\gamma_2}$ (上限)
可靠度 $R_0(t)$	$(e^{-\gamma_1/\hat{\theta}_0}, e^{\gamma_1/\hat{\theta}_0})$	$e^{-\gamma_2/\hat{\theta}_0}$ (下限)
可靠寿命 t_R	$(\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_1} \ln \frac{1}{R}, \hat{\theta}_0 e^{\gamma_1} \ln \frac{1}{R})$	$\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_2} \ln \frac{1}{R}$ (下限)
加速系数 τ_i	$(\hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 u_{1-\alpha/2}}, \hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 u_{1-\alpha/2}})$	$\hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 u_{1-\alpha/2}}$ (下限)

加速系数的置信区间不能从平均寿命的置信区间得到,要另外推导。由式(13.23)中加速系数的估计可知

$$\ln \hat{\tau}_i = \hat{b}(\varphi_0 - \varphi_i)$$

其中, $\hat{\tau}_i = \hat{\tau}_{S_i \sim S_0}$, $\varphi_i = \varphi(S_i)$ 。由于 $\ln \hat{\tau}_i$ 的精确分布很难给出,因此用正态分布近似,其数学期望和方差分别为

$$\begin{aligned} E(\ln \hat{\tau}_i) &= b(\varphi_0 - \varphi_i) = \ln \tau_i \\ \sigma_i^2 &= \text{var}(\ln \hat{\tau}_i) = \text{var}(\hat{b})(\varphi_0 - \varphi_i)^2 = \frac{(\varphi_0 - \varphi_i)^2 E}{EG - I^2} \end{aligned} \quad (13.28)$$

于是有如下近似

$$\ln \hat{\tau}_i \stackrel{A}{\sim} N(\ln \tau_i, \sigma_i^2) \quad (13.29)$$

因此得到 τ_i 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$P(\hat{\tau}_i e^{u_{1-\alpha/2} \sigma_i} \leq \tau_i \leq \hat{\tau}_i e^{u_{1-\alpha/2} \sigma_i}) = 1 - \alpha \quad (13.30)$$

同理,可得到 τ_i 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限

$$P(\tau_i \geq \hat{\tau}_i e^{u_{1-\alpha} \sigma_i}) = 1 - \alpha \quad (13.31)$$

例 13.3 根据例 13.2 已算得各种可靠性指标的点估计,现在来计算其区间估计。

在正常工作电压 $S_0 = 10 \text{ V}$ 下, $\ln \hat{\theta}_0$ 的方差可由式(13.25)计算,即

$$\sigma_0^2 = \frac{546.0511 + (\ln 10)^2 \times 53.0298 - 2(\ln 10) \times 169.2807}{301.0252} = 0.1585$$

$\sigma_0 = 0.3978$ 。若取 $\alpha = 0.10$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0.95} = 1.6449$, $u_{1-\alpha} = u_{0.9} = 1.2816$, 于是 $\gamma_1 = \sigma_0 u_{1-\alpha/2} = 0.6543$, $\gamma_2 = \sigma_0 u_{1-\alpha} = 0.5098$ 。然后利用 $\hat{\theta}_0 = 102020 \text{ h}$, 可得置信水平为 $1-\alpha = 0.9$ 的各种可靠性指标的置信区间与置信限,如表 13.3 所列。

表 13.3 可靠性指标的计算结果

可靠性指标	90 %置信区间	90 %置信限
平均寿命 θ_0	(53 030, 196 265)	61 375(下限)
失效率 λ_0	$(5.095 \times 10^{-6}, 18.857 \times 10^{-6})$	16.320×10^{-6} (上限)
可靠度 $R_0(10\ 000)$	(0.818 1, 0.950 3)	0.849 4(下限)
可靠寿命 $t_{0.9}$	(5 587, 20 676)	6 456(下限)

为得到加速系数的置信区间与置信限,先计算各 $\ln \tau_i$ 的方差 σ^2 。由式(13.28)算得

$$\sigma_i = 0.419\ 6(\ln S_i - \ln 10)$$

对加速系数,工程中常关心其 90 %的单侧置信下限。对 $\alpha=0.10$,按式(13.31)可以算得各加速系数的 90 %单侧置信下限 $\hat{\tau}_{iL}$,具体见表 13.4。

表 13.4 参数估计的结果

S_i	σ_i	$\hat{\tau}_i$	$\hat{\tau}_{iL}$	S_i	σ_i	$\hat{\tau}_i$	$\hat{\tau}_{iL}$
15	0.170 1	9.08	7.30	25	0.384 5	113.40	68.66
18	0.246 6	20.68	15.07	35	0.525 7	636.58	324.49

4. 定时截尾样本下的统计分析

在定时截尾试验下,得应力水平 S_i 下的试验数据如下:

$$t_{i1} \leq t_{i2} \leq \cdots \leq t_{ir_i} \leq \tau_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

其中, τ_i 为截尾时间,相应的失效数为 r_i 。由于 S_i 下的总试验时间 $T_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{ij} + (n_i - r_i)\tau_i$ 的分布难以给出,因此无法使用定数截尾样本的统计分析方法来处理。这里采用如下的方法:先用极大似然估计求得诸 θ_i 的估计 $\hat{\theta}_i$,根据极大似然估计的性质, $\ln \hat{\theta}_i$ 也是 $\ln \theta_i$ 的极大似然估计;再由极大似然估计的渐近正态性,可适应加速模型,然后用最小二乘估计得到模型参数 a , b 的估计。这个方法简单易行,精度也不差,但要求每个应力水平下的样本量和失效数较大。下面具体叙述该方法。

根据假定 I,在加速应力水平 S_i 下的寿命服从指数分布,其平均寿命 θ_i 的极大似然估计为

$$\hat{\theta}_i = T_i / r_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad (13.32)$$

根据假定 II 和极大似然估计的渐近正态性,可建立如下的一元线性回归模型

$$\ln \hat{\theta}_i = a + b \varphi(S_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad (13.33)$$

其中, 诸 ε_i 为随机误差项, 其数学期望为 0, 方差记为 σ^2 , 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 相互独立。对上述一元线性回归实施最小二乘法, 即可得到 a, b 的最小二乘估计

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \quad \text{与} \quad \hat{b} = l_{xy}/l_{xx} \quad (13.34)$$

其中

$$\bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i, \quad y_i = \ln \hat{\theta}_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad x_i = \varphi(S_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)^2$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^k x_i y_i - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k x_i \right) \left(\sum_{i=1}^k y_i \right)$$

这样, 得到如下的加速模型

$$\ln \hat{\theta} = \hat{a} + \hat{b} \varphi(S) \quad (13.35)$$

这个加速模型是否可用? 如何用它作可靠性指标的点估计与区间估计? 这些问题叙述如下:

① 加速模型的检验。用相关系数检验法来检验这个加速模型的显著性。设有一组配对样本

$$(x_i, y_i) = (\varphi(S_i), \ln \hat{\theta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

它们的相关系数定义为

$$r = l_{xy} / (l_{xx} l_{yy})^{1/2} \quad (13.36)$$

其中, l_{xx}, l_y 如前所述, 且

$$l_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i y_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_i y_i \right)^2$$

对给定的显著性水平 α ($0 < \alpha < 1$), 从附表 A. 1 按自由度 $f = k - 2$ 查得临界值 r_α 。假如 $|r| > r_\alpha$, 则认为这个样本中 x_i 与 y_i 相关; 否则, 认为 x_i 与 y_i 不相关。在这里, 只有在 $|r| > r_\alpha$ 时, 这个加速模型才可以使用。

② 可靠性指标的点估计。在 S 取正常应力水平 S_0 时, 由加速模型可得 $\ln \theta_0$ 的点估计

$$\ln \hat{\theta}_0 = \hat{a} + \hat{b} \varphi(S_0)$$

由此可得平均寿命 θ_0 、失效率 λ_0 等可靠性指标的点估计。

③ 至于区间估计, 至今尚无精确的区间估计。下面给出近似的区间估计和近似置信限, 具体在表 13.5 中列出。其中

$$\hat{\tau}_i \triangleq \hat{\tau}_{S_i \sim S_0}, \quad \hat{\sigma}^2 \triangleq \frac{l_{yy} - \hat{b} l_{xy}}{k - 2}, \quad c^2 \triangleq \left[1 + \frac{1}{k} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{l_{xx}} \right]$$

$$\gamma_1 \triangleq c \hat{\sigma} u_{1-\alpha/2}, \quad \gamma_2 \triangleq c \hat{\sigma} u_{1-\alpha}, \quad \sigma_i^2 \triangleq (x_0 - x_i)^2 \hat{\sigma}^2 / l_{xx}$$

表 13.5 可靠性指标在置信水平为 $1-\alpha$ 时的置信区间和置信限

可靠性指标	置信区间	置信限
平均寿命 θ_0	$(\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_1}, \hat{\theta}_0 e^{\gamma_1})$	$\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_2}$ (下限)
失效率 λ_0	$(\hat{\theta}_0^{-1} e^{-\gamma_1}, \hat{\theta}_0^{-1} e^{\gamma_1})$	$\hat{\theta}_0^{-1} e^{\gamma_2}$ (上限)
可靠度 $R_0(t)$	$(e^{-(t e^{\gamma_1})/\hat{\theta}_0}, e^{-(t e^{-\gamma_1})/\hat{\theta}_0})$	$e^{-(t e^{\gamma_2})/\hat{\theta}_0}$ (下限)
可靠寿命 t_R	$(\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_1} \ln \frac{1}{R}, \hat{\theta}_0 e^{\gamma_1} \ln \frac{1}{R})$	$\hat{\theta}_0 e^{-\gamma_2} \ln \frac{1}{R}$ (下限)
加速系数 τ_i	$(\hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 a/2}, \hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 1-a/2})$	$\hat{\tau}_i e^{\sigma_i^2 a}$ (下限)

13.2.2 威布尔分布场合下恒加试验数据的统计分析

1. 基本假定

假定 I 在应力水平 S_i 下,产品的寿命服从威布尔分布 $W(m_i, \eta_i)$ ($i=0,1,\dots,k$)。

假定 II 在各应力水平 S_i 下,产品的失效机理不变,这意味着分布中的形状参数 m_i 相等,即 $m_0 = m_1 = \dots = m_k \triangleq m$ 。

假定 III 产品的特征寿命 η_i 与所加的应力水平 S_i 间满足如下的加速方程:

$$\ln \eta_i = a + b \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.37)$$

其中, a, b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 是已知函数。为方便起见,记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i)$ ($i=0,1,\dots,k$)。

威布尔分布恒加试验的统计分析,主要是先求出 a, b 和 m 的估计,然后再求出正常应力水平 S_0 下各可靠性指标的估计。下面分情况给出威布尔分布场合恒加试验的统计分析。

2. 定数截尾样本下的线性估计

定数截尾样本下的线性估计可按以下步骤进行:

① 先将数据取对数,把 S_i 下产品的寿命分布 $W(m_i, \eta_i)$ 化成极值分布 $G(\mu_i, \sigma_i)$, 其中 $\mu_i = \ln \eta_i, \sigma_i = 1/m_i$ 。然后用 7.1.2 小节中的方法,当 $n_i \leq 25$ 时,求出 μ_i 和 σ_i 的 BLUE; 当 $n_i > 25$ 时,求出 μ_i 和 σ_i 的 GLUE; 结果记为 $\hat{\mu}_i$ 和 $\hat{\sigma}_i$ ($i=1,2,\dots,k$)。

② 求 m 的估计。由假定 II 得 $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_k \triangleq \sigma$ 。用拉格朗日乘子法,在诸 $\hat{\sigma}_i$ 的线性组合类中找一个方差最小的无偏估计,作为 σ 的估计,其表达式及其方差为

$$\hat{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^k l_{r_i, n_i}^{-1} \hat{\sigma}_i \right) \left(\sum_{i=1}^k l_{r_i, n_i}^{-1} \right)^{-1}, \quad \text{var}(\hat{\sigma}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^k l_{r_i, n_i}^{-1} \right)^{-1} \quad (13.38)$$

其中, l_{r_i, n_i}^{-1} 是 $\hat{\sigma}_i$ 的方差系数,可查附表 B.1, B.2 或参考文献[5]的表 1, 2。由此得到 m 的估计: $\hat{m} = 1/\hat{\sigma}$ 。但 \hat{m} 不是 m 的无偏估计,经修正可得 m 的近似无偏估计

$$\tilde{m} = \left(\sum_{i=1}^k l_{r_i, n_i}^{-1} - 1 \right) \left(\sum_{i=1}^k l_{r_i, n_i}^{-1} \hat{\sigma}_i \right)^{-1} \quad (13.39)$$

而且 \tilde{m} 的方差比 \hat{m} 的小。

③ 求加速方程中 a, b 的估计。因为诸 $\hat{\mu}_i$ 是 $\mu_i = \ln \eta_i = a + b \varphi_i$ 的相互独立的无偏估计, 且方差系数 A_{r_i, n_i} 已知, 具体可查参考文献[5]的表 1, 2。这样可建立方差不等的线性模型, 然后由高斯-马尔可夫定理, 得 a, b 的 BLUE 为

$$\hat{a} = \frac{GH - IM}{EG - I^2}, \quad \hat{b} = \frac{EM - IH}{EG - I^2} \quad (13.40)$$

其中

$$E = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1}, \quad I = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} \varphi_i, \quad M = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} \varphi_i \hat{\mu}_i$$

$$G = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} \varphi_i^2, \quad H = \sum_{i=1}^k A_{r_i, n_i}^{-1} \hat{\mu}_i$$

而 \hat{a} 与 \hat{b} 的方差和协方差分别为

$$\text{var}(\hat{a}) = \frac{G\sigma^2}{EG - I^2}, \quad \text{var}(\hat{b}) = \frac{E\sigma^2}{EG - I^2}, \quad \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-I\sigma^2}{EG - I^2}$$

④ 正常应力水平 S_0 下分布参数估计: $\hat{\mu}_0 = \hat{a} + \hat{b} \varphi_0$; $\hat{\eta}_0 = e^{\hat{\mu}_0}$ 。这样, 有了 m 和 η_0 的估计, 就可以求出正常应力水平 S_0 下各种可靠性指标的估计。

例 13.4 某型号电容器的寿命服从威布尔分布, 为获得该电容器在正常温度水平 $t_0 = 50^\circ\text{C}$ 下可靠性指标的估计, 选定 4 个加速温度: $t_1 = 85^\circ\text{C}$, $t_2 = 135^\circ\text{C}$, $t_3 = 150^\circ\text{C}$, $t_4 = 175^\circ\text{C}$ 进行定数截尾恒加试验, 各应力水平下的样本量分别为

$$n_1 = 60, \quad n_2 = 60, \quad n_3 = 20, \quad n_4 = 20$$

各应力水平下的截尾失效数分别为

$$r_1 = 26, \quad r_2 = 33, \quad r_3 = 12, \quad r_4 = 14$$

① 在温度 85°C 下, 寿命数据(单位: h)如下:

262.52, 445.05, 500.00, 600.00, 836.00, 850.00, 867.20, 1 350.00, 1 350.00, 1 750.00, 1 750.00, 1 750.00, 1 750.00, 1 750.00, 1 993.00, 2 050.00, 2 500.00, 2 500.00, 2 500.00, 2 608.10, 2 608.10, 2 608.10, 2 609.10, 3 500.00, 3 500.00。

由样本量 $n_1 = 60$ 与失效数 $r_1 = 26$, 查参考文献[5]的表 2 得 $l_{r_1, n_1}^{-1} = 28.6128$, $A_{r_1, n_1}^{-1} = 17.0821$, 于是得到 μ_1 和 σ_1 的 GLUE: $\hat{\mu}_1 = 8.6204$, $\hat{\sigma}_1 = 0.7708$ 。

② 在温度 135°C 下, 寿命数据(单位: h)如下:

2.00, 11.30, 20.00, 22.00, 50.00, 50.00, 52.00, 52.00, 131.45, 136.25, 137.40, 138.30, 143.30, 146.00, 152.00, 152.00, 162.00, 196.30, 199.30, 200.00, 205.30, 236.45, 285.30,

315.00, 315.00, 315.00, 317.00, 400.00, 450.45, 493.00, 493.00, 493.00, 493.00。

由样本量为 $n_2=60$ 与失效数 $r_2=33$, 查参考文献[5]的表 2 得 $l_{r_2, n_2}^{-1}=38.372$, $A_{r_2, n_2}^{-1}=27.142$, 由此得到 μ_2 和 σ_2 的 GLUE: $\hat{\mu}_2=6.485\ 5$, $\hat{\sigma}_2=1.113\ 5$ 。

③ 在温度 150 °C 下, 寿命数据(单位:h)如下:

16.30, 26.06, 32.00, 36.42, 42.06, 60.10, 83.18, 92.10, 92.10, 100.00, 130.00, 165.00。

由样本量为 $n_3=20$ 与失效数 $r_3=12$, 查参考文献[5]的表 2 得 $l_{r_3, n_3}^{-1}=18.311\ 9$, $A_{r_3, n_3}^{-1}=10.193\ 4$, 于是得到 μ_3 和 σ_3 的 GLUE: $\hat{\mu}_3=5.210\ 8$, $\hat{\sigma}_3=0.882\ 5$ 。

④ 在温度 175 °C 下, 寿命数据(单位:h)如下:

15.06, 15.18, 23.48, 23.54, 24.13, 24.24, 40.18, 48.36, 48.42, 48.48, 50.00, 50.13, 74.24, 114.54。

由样本量 $n_4=20$ 与失效数 $r_4=14$, 查参考文献[5]的表 2 得 $l_{r_4, n_4}^{-1}=16.470\ 1$, $A_{r_4, n_4}^{-1}=13.119\ 2$, 于是得到 μ_4 和 σ_4 的 GLUE: $\hat{\mu}_4=4.525\ 9$, $\hat{\sigma}_4=0.862\ 6$ 。

将以上计算结果代入式(13.38), 得 σ 的线性无偏估计: $\hat{\sigma}=0.973\ 70$, 从而得 m 的估计为 $\hat{m}=1.060\ 5$ 。而由式(13.39)可得 m 的近似无偏估计为 $\tilde{m}=1.055\ 4$ 。

由式(13.40)可得加速模型中系数 a, b 的估计为 $\hat{a}=-12.245\ 8$, $\hat{b}=7\ 459$ 。由此得正常温度水平 $t_0=50\ ^\circ\text{C}$ (热力学温度为 323 K) 下各可靠性指标的估计:

$$\hat{\mu}_0 = \ln \hat{\eta}_0 = \hat{a} + \hat{b}/323 = 10.847\ 1, \quad \hat{\eta}_0 = e^{\hat{\mu}_0} = 5.14 \times 10^4$$

所以在正常温度水平 $t_0=50\ ^\circ\text{C}$ 下, 产品寿命服从参数为 $\tilde{m}=1.055\ 4$, $\hat{\eta}_0=5.14 \times 10^4$ 的威布尔分布。

3. 定时截尾样本下的极大似然估计

对定时截尾试验, 在三个基本假定下, 得到似然函数

$$L(a, b, m) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \frac{n_i!}{(n_i - r_i)!} \frac{m t_{ij}^{m-1}}{\eta_i^m} e^{-\left(\frac{t_{ij}}{\eta_i}\right)^m} \cdot \left[e^{-\left(\frac{\tau_i}{\eta_i}\right)^m} \right]^{n_i - r_i} \quad (13.41)$$

其中, $\eta_i = e^{a+b\varphi_i}$ 。 a, b, m 的极大似然估计可通过数值方法求解下述三个超越方程得到, 但对初值要求较高。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left\{ \left[\sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{t_{ij}}{\eta_i} \right)^m + (n_i - r_i) \left(\frac{\tau_i}{\eta_i} \right)^m \right] - r_i \right\} &= 0 \\ \sum_{i=1}^k \varphi_i \left\{ \left[\sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{t_{ij}}{\eta_i} \right)^m + (n_i - r_i) \left(\frac{\tau_i}{\eta_i} \right)^m \right] - r_i \right\} &= 0 \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=1}^k \left[\sum_{j=1}^{r_i} \ln t_{ij} - \sum_{j=1}^{r_i} \left(\frac{t_{ij}}{\eta_i} \right)^m \ln t_{ij} - (n_i - r_i) \left(\frac{\tau_i}{\eta_i} \right)^m \ln \tau_i \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.42)$$

13.2.3 对数正态分布场合下恒加试验数据的统计分析

1. 基本假定

假定 I 在各应力水平 S_i 下, 产品寿命服从对数正态分布 $LN(\mu_i, \sigma_i^2)$ ($i=0, 1, \dots, k$)。

假定 II 在各应力水平 S_i 下, 产品的失效机理不变, 这意味着分布中的形状参数 σ_i 相等, 即 $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_k \triangleq \sigma$ 。

假定 III 分布参数 μ_i 与所加的应力水平 S_i 之间满足如下加速方程:

$$\mu_i = a + b \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.43)$$

其中, a, b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 是已知函数。为方便起见, 记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i)$ ($i=0, 1, \dots, k$)。

对数正态分布恒加试验的统计分析, 主要是先求出 a, b 和 σ 的估计, 然后再求出正常应力水平 S_0 下各可靠性指标的估计。下面分情况进行介绍。

2. 定数截尾样本下的线性估计

定数截尾试验下的数据处理方法与威布尔分布场合下的处理方法完全类似, 具体如下:

① 在各应力水平 S_i 下, 当 $n_i \leq 20$ 时, 求出 μ_i 和 σ 的 BLUE; 当 $n_i > 20$ 时, 求出 μ_i 和 σ_i 的 GLUE, 记为 $\hat{\mu}_i$ 和 $\hat{\sigma}_i$ ($i=1, 2, \dots, k$)。

② 由假定 II 得 $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_k \triangleq \sigma$ 。用拉格朗日乘子法, 在诸 σ_i 的线性组合类中找一个方差最小的无偏估计, 作为 σ 的估计, 其表达式及其方差为

$$\hat{\sigma} = \left(\sum_{i=1}^k l'_{r_i, n_i} \hat{\sigma}_i \right) \left(\sum_{i=1}^k l'_{r_i, n_i} \right)^{-1}, \quad \text{var}(\hat{\sigma}) = \sigma^2 \left(\sum_{i=1}^k l'_{r_i, n_i} \right)^{-1} \quad (13.44)$$

其中, l'_{r_i, n_i} 是 $\hat{\sigma}_i$ 的方差系数, 可查附表 B. 3, B. 4 或参考文献[42]的表 5, 6。

③ 因为诸 $\hat{\mu}_i$ 是 $\mu_i = a + b \varphi_i$ 的相互独立的无偏估计, 且方差系数 A'_{r_i, n_i} 已知, 具体可查附表 B. 3, B. 4 或参考文献[5]的表 5, 6, 这样可建立方差不等的线性模型, 然后由高斯-马尔可夫定理, 得 a, b 的 BLUE 为

$$\hat{a} = \frac{GH - IM}{EG - I^2}, \quad \hat{b} = \frac{EM - IH}{EG - I^2} \quad (13.45)$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^k (A'_{r_i, n_i})^{-1}, & I &= \sum_{i=1}^k (A'_{r_i, n_i})^{-1} \varphi_i, & M &= \sum_{i=1}^k (A'_{r_i, n_i})^{-1} \varphi_i \hat{\mu}_i \\ G &= \sum_{i=1}^k (A'_{r_i, n_i})^{-1} \varphi_i^2, & H &= \sum_{i=1}^k (A'_{r_i, n_i})^{-1} \hat{\mu}_i \end{aligned}$$

而 \hat{a} 与 \hat{b} 的方差和协方差分别为

$$\text{var}(\hat{a}) = \frac{G \sigma^2}{EG - I^2}, \quad \text{var}(\hat{b}) = \frac{E \sigma^2}{EG - I^2}, \quad \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{-I \sigma^2}{EG - I^2}$$

④ 正常应力水平 S_0 下分布参数及可靠性指标的估计为 $\hat{\mu}_0 = \hat{a} + \hat{b} \varphi_0$, 这样, 有了 σ 和 μ_0 的估计, 就可以求出正常应力水平 S_0 下各种可靠性指标的估计。

3. 定时截尾样本下的极大似然估计

定时截尾试验数据的统计分析可按如下步骤进行:

① 在每个应力水平 S_i 下, 求得 μ 和 σ 的极大似然估计, 记为 $\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i, i=1, 2, \dots, k$ 。

② 用加权平均得到公共 σ 的估计

$$\hat{\sigma} = \frac{n_1 \hat{\sigma}_1 + \dots + n_k \hat{\sigma}_k}{n_1 + \dots + n_k} \quad (13.46)$$

③ 由假定Ⅲ, 列出一元线性回归模型: $\hat{\mu}_i = a + b \varphi_i (i=1, 2, \dots, k)$ 。使用最小二乘法得到 a, b 的估计

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\mu}_i - \hat{b} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varphi_i \right) \\ \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^k \varphi_i \hat{\mu}_i - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i \right) \left(\sum_{i=1}^k \hat{\mu}_i \right)}{\sum_{i=1}^k \varphi_i^2 - \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13.47)$$

由此得到 $\hat{\mu}_0 = \hat{a} + \hat{b} \varphi_0$ 。不过, 对此加速方程需要进行相关性检验, 只有通过了相关性检验, 才可以用来计算正常应力水平 S_0 下各种可靠性指标的估计。

13.3 步进应力加速寿命试验

步进应力加速寿命试验, 简称步加试验。它也是先选一组加速应力水平: S_1, S_2, \dots, S_k , 它们都高于正常应力水平 S_0 , 即 $S_0 < S_1 < \dots < S_k$ 。然后从一批产品中随机选取 n 个样品, 将全部样品置于 S_1 下进行寿命试验, 直到规定的试验时间 τ_1 或者规定的失效数 r_1 为止; 再将应力提高到 S_2 , 把未失效的样品放在更高的加速应力水平 S_2 下继续进行寿命试验, 如此继续下去, 直到规定的试验时间或有一定数量的样品发生失效为止。图 13.2 是步加试验示意图。

在每个应力水平 S_i 下, r_i 个产品的失效时间(从应力升到 S_i 时算起)为

$$t_{i1} \leq t_{i2} \leq \dots \leq t_{ir_i} \leq \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.48)$$

其中, τ_i 为 S_i 下的截尾时间, 也是应力水平改变时刻。如果是定数截尾试验, 则 $\tau_i = t_{ir_i}$ 。

需要指出, 在应力水平 S_i 下的失效数据 t_{ij} , 除 $i=1$ 外, 显然已不是产品在应力水平 S_i 下的真实寿命, 因为在应力水平 S_i 下失效的产品已在应力水平 S_1, S_2, \dots, S_{i-1} 下经历了寿命试验, 所以它们的实际寿命大于 t_{ij} 。为了将产品在前 $i-1$ 个应力水平下所经历的试验时间补偿到 t_{ij} 上去, 以获得产品在 S_i 下的真实寿命数据, 需要不同应力水平下的时间折算公式, 这也是

步加试验数据分析的关键之一。

13.3.1 指数分布场合下步加试验数据的统计分析

1. 基本假定

指数分布场合下步加试验数据的统计分析是在以下三个假定下进行的。

假定 I 在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_k 下, 产品的寿命均服从指数分布, 相应的失效率为 $\lambda_i (i=0, 1, \dots, k)$ 。

假定 II 产品的平均寿命 $\theta_i = 1/\lambda_i$ 与加速应力水平 S_i 满足如下的加速模型:

$$\ln \theta_i = a + b \triangleq \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.49)$$

其中, a, b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 是已知函数。为方便起见, 记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i) (i=0, 1, \dots, k)$ 。

假定 III 产品的剩余寿命仅依赖于已累积失效部分和当时的应力水平, 而与累积方式无关。

假定 III 称为累积失效假定, 是 Nelson(1980) 根据物理学原理提出的。根据这一假定, 产品在应力水平 S_i 下工作 τ_i 时间的累积失效率 $F_i(\tau_i)$ 等于此产品在应力水平 S_j 下工作某一时间(记为 τ_{ij})的累积失效概率 $F_j(\tau_{ij})$, 即 $F_i(\tau_i) = F_j(\tau_{ij})$ 。利用这一假定, 可以获得步加试验中的时间折算公式。

2. 数据折算处理

设产品寿命在应力水平 S_i 下的寿命服从指数分布, 相应的失效率为 $\lambda_i (i=0, 1, \dots, k)$, 则在应力水平 S_i 下的工作时间 τ_i 折算到应力水平 S_j 下的折算时间 τ_{ij} 为

$$\tau_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \tau_i = \frac{\theta_j}{\theta_i} \tau_i = e^{b(\varphi_j - \varphi_i)} \tau_i, \quad i \neq j \quad (13.50)$$

折算时间之和为

$$a_1 = 0; \quad a_i = \sum_{l=1}^{i-1} \tau_{kl} = \sum_{l=1}^{i-1} e^{b(\varphi_i - \varphi_l)} \tau_l, \quad i = 2, 3, \dots, k \quad (13.51)$$

由假定 III, 在 S_i 下真实的寿命数据为

$$t_{i1} + a_i \leq t_{i2} + a_i \leq \dots \leq t_{ir_i} + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.52)$$

但是因为 a_i 是未知参数 b 的函数, 所以这些数据也是 b 的函数。记

$$R_i = r_1 + r_2 + \dots + r_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.53)$$

为累计失效数, 则寿命数据式(13.52)可以看成是双截尾样本(或区间样本), 其左截尾数为 R_{i-1} , 右截尾数为 R_i 。

指数分布场合下步加试验数据的统计分析是基于以下结论进行的。

定理 13.1 设 $t_{r,n}$ 和 $t_{s,n}$ ($r < s$) 是从指数分布中抽取的样本量为 n 的样本中的第 r 个和第 s 个顺序统计量, 则其差 $t_{s,n} - t_{r,n}$ 是从同一指数分布总体中抽取的样本量为 $n-r$ 的样本的第 $s-r$ 个顺序统计量。

根据该定理,可以对寿命数据式(13.52)采用相减的办法,来消除折算时间 a_i 。

3. 定时截尾步加试验的统计分析

记

$$\left. \begin{aligned} t_{ij}^* &= t_{i,j+1} - t_{i,1}, & \tau_i^* &= \tau_i - t_{i,1}, & i &= 2, 3, \dots, k; & j &= 1, 2, \dots, r_{i-1} \\ t_{1j}^* &= t_{1j}, & j &= 1, 2, \dots, r_1 & \tau_1^* &= \tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (13.54)$$

把步加寿命试验数据全部转化为定时截尾恒加试验数据,但在 S_i 下每个样本中失效数 r_i 都要减少 1,且样本量为 $n - R_{i-1} - 1$ 。这样,数据就可以完全按照 13.2.1 小节的方法进行处理。

4. 定数截尾步加试验的统计分析

因为在定数截尾试验中 $\tau_i = t_{i,r_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$),所以

$$a_i = \frac{\theta_i}{\theta_1} t_{1,r_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2} t_{2,r_2} + \frac{\theta_i}{\theta_{i-1}} t_{i-1,r_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, k \quad (13.55)$$

恰好是在 S_i 下的第 R_{i-1} 个数据失效,所以在 S_i 下真实的 $r_i + 1$ 个寿命数据为

$$a_i \leq t_{i1} + a \leq t_{i2} + a \leq \dots \leq t_{i,r_i} + a, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.56)$$

与上述定时截尾情形类似:用后面的分量(从第二个开始)分别减去第一个分量,所得 r_i 个寿命数据 $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,r_i}$ 是样本量为 $n - R_{i-1}$ 的定数截尾样本。这样,把步加寿命试验数据全部转化为定数截尾恒加试验数据:

应力水平	截尾样本	样本量	截尾数
S_1	$t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1,r_1}$	n	$r_1 = R_1$
S_2	$t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2,r_2}$	$n - R_1$	r_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_i	$t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,r_i}$	$n - R_{i-1}$	r_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S_k	$t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{k,r_k}$	$n - R_{k-1}$	r_k

就可以完全按照 13.2.1 小节的方法进行处理。

13.3.2 威布尔分布场合下步加试验数据的统计分析

1. 基本假定

威布尔分布场合下步加试验数据的统计分析是在以下 4 个假定下进行的。

假定 I 在应力水平 S_i 下,产品的寿命均服从威布尔分布 $W(m_i, \eta_i)$ ($i = 0, 1, \dots, k$)。

假定 II 各应力水平 S_i 下的形状参数 m_i 相等,即 $m_0 = m_1 = \dots = m_k = m$ 。

假定 III 产品的特征寿命 η_i 与所加的应力水平 S_i 间满足如下的加速方程:

$$\ln \eta_i = a + b \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.57)$$

其中, a, b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 为已知函数。为方便起见, 记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i) (i=0, 1, \dots, k)$ 。

假定Ⅳ 产品的剩余寿命仅依赖于已累积失效部分和当时的应力水平, 而与累积方式无关(Nelson 累积失效假定)。

2. 数据折算处理

由假定Ⅱ分布的形状参数 m_i 相等, 则在应力水平 S_i 下的工作时间 τ_i 折算到应力水平 S_j 下的折算时间 τ_{ij} 为

$$\tau_{ij} = \frac{\eta_j}{\eta_i} \tau_i = e^{b(\varphi_j - \varphi_i)} \tau_i, \quad i \neq j \quad (13.58)$$

所以产品在 S_i 下的真实寿命数据为 $t_{ij} + a_i$, 其中 $a_i = \sum_{l=1}^{i-1} \tau_{li} = \sum_{l=1}^{i-1} e^{b(\varphi_i - \varphi_l)} \tau_l (i=2, 3, \dots, k)$ 。

记 $r = \sum_{i=1}^k r_i$, $H(i) = \varphi_1 - \varphi_i$, 则利用时间折算公式, 可以把步加试验数据得到的 r 个数据全部折算到应力水平 S_i 下, 即

$$\begin{aligned} & t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i r_1} \\ & e^{bH(1)} \tau_1 + e^{bH(2)} t_{21}, e^{bH(1)} \tau_1 + e^{bH(2)} t_{22}, \dots, e^{bH(1)} \tau_1 + e^{bH(2)} t_{2 r_2} \\ & \vdots \\ & \sum_{i=1}^{k-1} e^{bH(i)} \tau_i + e^{bH(k)} t_{k1}, \sum_{i=1}^{k-1} e^{bH(i)} \tau_i + e^{bH(k)} t_{k2}, \dots, \sum_{i=1}^{k-1} e^{bH(i)} \tau_i + e^{bH(k)} t_{k r_k} \end{aligned}$$

因为这批数据中含有未知参数 b , 所以不妨把这批数据(准样本)记为

$$t_1(b) < t_2(b) < \dots < t_r(b) \quad (13.59)$$

3. 逆矩法估计

因为式(13.59)的数据 $t_1(b) < t_2(b) < \dots < t_r(b)$ 是来自威布尔分布 $W(m, \eta_1)$ 的样本量为 n 的准样本的顺序统计量, 所以数据 $t_1^m(b) < t_2^m(b) < \dots < t_r^m(b)$ 来自均值为 $\theta = \eta_1^m$ 的指数分布的准样本的顺序统计量。令

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= n t_1^m(b) \\ W_2 &= (n-1) [t_2^m(b) - t_1^m(b)] \\ &\vdots \\ W_r &= (n-r+1) [t_r^m(b) - t_{r-1}^m(b)] \end{aligned} \right\} \quad (13.60)$$

则 W_1, W_2, \dots, W_r 是独立同分布且服从均值为 $\theta = \eta_1^m$ 的指数分布。令

$$u_i(m, b) = \sum_{j=1}^i W_j = \sum_{j=1}^i t_j^m(b) + (n-i) t_i^m(b), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

则 $-\ln \frac{u_1(m, b)}{u_2(m, b)}, -2 \ln \frac{u_2(m, b)}{u_3(m, b)}, \dots, -(r-1) \ln \frac{u_{r-1}(m, b)}{u_r(m, b)}$ 独立同分布, 且服从均值为 1 的指数分布。所以由逆矩法估计, 可得

$$\sum_{i=1}^{r-1} \ln \frac{u_r(m, b)}{u_i(m, b)} = r - 1 \quad (13.61)$$

此式含有未知参数 m 和 b , 为此再利用准样本 $t_1(b) < t_2(b) < \cdots < t_r(b)$, 求 m^{-1} 的 BLUE ($n \leq 25$) 或 GLUE ($n > 25$), 即

$$\hat{m}^{-1} = \sum_{i=1}^r C(n, r, i) \ln t_i(b)$$

或

$$\hat{m}^{-1} = \frac{1}{n k_{r,n}} \left[(2s - r) \ln t_s(b) - \sum_{i=1}^s \ln t_i(b) + \sum_{i=s+1}^r \ln t_i(b) \right] \quad (13.62)$$

而 $C(n, r, i), k_{r,n}$ 的值可查附表 B.2 或参考文献[5]的表 2。将 \hat{m}^{-1} 的估计代入式(13.61), 可得只含一个未知参数 b 的方程, 接着通过数值方法计算 b 的估计 \hat{b} , 再将 \hat{b} 代入式(13.62), 即可求得 m 的估计 \hat{m} , 然后可得应力水平 S_1 下特征寿命 η_1 的估计:

$$\hat{\eta}_1 = \left\{ \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r \hat{t}_i^{\hat{m}}(\hat{b}) + (n - r) \hat{t}_r^{\hat{m}}(\hat{b}) \right] \right\}^{1/\hat{m}} \quad (13.63)$$

由此得到加速方程中参数的 a 估计: $\hat{a} = \ln \hat{\eta}_1 - \hat{b} \varphi_1$ 。最后得正常应力水平 S_0 下特征寿命 η_0 的估计: $\hat{\eta}_0 = e^{\hat{a} + \hat{b} \varphi_0}$ 。有了 m 和 η_0 的估计, 接下来容易计算正常应力水平 S_0 下各种可靠性指标的估计。

13.3.3 对数正态分布场合下步加试验数据的统计分析

1. 基本假定

对数正态分布场合下步加试验数据的统计分析是在以下 4 个假定下进行的。

假定 I 在各应力水平 S_i 下, 产品寿命服从对数正态分布 $LN(\mu_i, \sigma_i^2)$, ($i=0, 1, \dots, k$)。

假定 II 在各应力水平 S_i 下, 产品的失效机理不变, 这意味着分布中的形状参数 σ_i 相等, 即 $\sigma_0 = \sigma_1 = \cdots = \sigma_k \triangleq \sigma$ 。

假定 III 分布参数 μ_i 与所加的应力水平 S_i 间满足如下的加速方程:

$$\mu_i = a + b \varphi(S_i), \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (13.64)$$

其中, a, b 为待估参数, $\varphi(\cdot)$ 是已知函数。为方便起见, 记 $\varphi_i \triangleq \varphi(S_i)$ ($i=0, 1, \dots, k$)。

假定 IV 产品的剩余寿命仅依赖于已累积失效部分和当时应力水平, 而与累积方式无关 (Nelson 累积失效假定)。

2. 数据折算处理

由假定 II, 分布的形状参数 σ_i 相等, 则在应力水平 S_i 下的工作时间 τ_i 折算到应力水平 S_j 下的折算时间 τ_{ij} 为

$$\tau_{ij} = \exp(\mu_j - \mu_i) \tau_i, \quad i \neq j \quad (13.65)$$

记 $a_1=0, a_i = \sum_{l=1}^{i-1} \tau_l = \sum_{l=1}^{i-1} e^{b(\varphi_i - \varphi_l)} \tau_l (i=2, 3, \dots, k)$, 则产品在 S_i 下的真实寿命数据为

$$t_{i1} + a_i \leq t_{i2} + a_i \leq \dots \leq t_{ir_i} + a_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (13.66)$$

即在每一个应力水平 $S_i (i \geq 1)$ 下, r_i 个失效产品的折算寿命为

$$t_{ij}(b) = \sum_{l=1}^{i-1} \tau_l e^{b[\varphi_i - \varphi_l]} + t_{ij} \quad (13.67)$$

其中, $i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, r_i$, 除 $i=1$ 外, 它们都是 b 的函数。

3. 截尾样本时的极大似然估计

下面计算参数 a, b 和 σ 的极大似然估计。由准样本, 得关于 a, b 和 σ 的似然函数

$$L(a, b, \sigma) = C \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{r_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma} t_{ij}(b)} e^{-A_{ij}} \cdot [1 - \Phi(B_k)]^{n-r} \quad (13.68)$$

其中

$$A_{ij} = \frac{[\ln t_{ij}(b) - a - b\varphi_i]^2}{2\sigma^2}, \quad B_k = \frac{\ln \tau_k(b) - a - b\varphi_k}{\sigma}$$

$$C = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k! (n-r)!}, \quad \tau_k(b) = \sum_{l=1}^k \tau_l e^{b(\varphi_k - \varphi_l)}$$

而 $\Phi(\cdot)$ 指标准正态分布的分布函数。

由式(13.68)得到关于 a, b 和 σ 的如下似然方程组:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} A_{ij} + \frac{n-r}{\sigma} W_k &= 0 \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} \frac{t'_{ij}(b)}{t_{ij}(b)} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} A_{ij} \left[\frac{t'_{ij}(b)}{t_{ij}(b)} - \varphi_i \right] + \frac{n-r}{\sigma} W_k \left[\frac{\tau'_k(b)}{\tau_k(b)} - \varphi_k \right] &= 0 \\ \frac{r}{\sigma} - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r_i} B_{ij} - \frac{n-r}{\sigma^2} W_k [\ln \tau_k(b) - a - b\varphi_k] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.69)$$

其中

$$A_{ij} = \frac{\ln t_{ij}(b) - a - b\varphi_i}{\sigma^2}, \quad B_{ij} = \frac{[\ln t_{ij}(b) - a - b\varphi_i]^2}{\sigma^3}$$

$$W_k = \phi \left[\frac{\ln \tau_k(b) - a - b\varphi_k}{\sigma} \right] \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{\ln \tau_k(b) - a - b\varphi_k}{\sigma} \right] \right\}^{-1}$$

$$t'_{ij}(b) = \sum_{l=1}^{i-1} \tau_l (\varphi_i - \varphi_l) e^{b(\varphi_i - \varphi_l)}$$

$$\tau'_k(b) = \sum_{l=1}^k \tau_l (\varphi_k - \varphi_l) e^{b(\varphi_k - \varphi_l)}$$

而 $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ 分别指标准正态分布的密度函数和分布函数。通过数值方法求解, 可得到 a, b 和 σ 的极大似然估计 \hat{a}, \hat{b} 和 $\hat{\sigma}$ 。

有了 a, b 的估计, 就可以得到正常应力水平 S_0 下对数均值 μ_0 的估计: $\hat{\mu}_0 = \hat{a} + \hat{b} \varphi_0$ 。然后从 μ_0 和 σ 的估计出发, 容易求出在正常应力水平 S_0 下的各种可靠性指标的估计。

习 题

13.1 某产品的寿命受温度的影响且服从指数分布。对该产品进行恒加试验, 得到的试验数据如题表 13.1 所列。

题表 13.1 试验数据一

温度/℃	失效时间/h
40	1 298, 1 390, 3 187, 3 241, 3 261, 3 313, 4 501, 4 568, 4 841, 4 982, 5 000(90 个产品右截尾)
60	581, 925, 1 432, 1 586, 2 452, 2 734, 2 772, 4 106, 4 674, 5 000(11 个产品右截尾)
80	283, 361, 515, 638, 854, 1 024, 1 030, 1 045, 1 767, 1 777, 1 856, 1 951, 1 964, 2 884, 5 000(1 个产品右截尾)

试评估该产品在温度为 20℃ 时的平均寿命。

13.2 某产品寿命主要受温度和电压的影响, 且已知其寿命服从指数分布。现对该产品进行恒加试验, 得到的试验数据如题表 13.2 所列。

题表 13.2 试验数据二

温度/K	电压/V	失效时间/h
358	12	445, 498, 588, 691, 750(20 个产品右截尾)
378	12	178, 211, 266, 252, 298, 309, , 343, 364, 387, 398, 445(14 个产品右截尾)
378	16	118, 145, 163, 192, 208, 210, 231, 249, 254, 293, 300(10 个产品右截尾)
398	12	87, 112, 116, 134, 149, 155, 163, 173, 193, 214, 228(7 个产品右截尾)

试评估该产品在温度 328 K 和电压 10 V 时的平均寿命。

13.3 为了评估某厂所生产的二极管可靠性, 专门组织一次定时转换步加试验。已知该产品在一定电压下的寿命服从指数分布, 经过摸底试验, 获知可考虑 4 个应力(电压)水平, 即 38 V, 41 V, 44 V 和 47 V。现在生产线上随机抽取 120 只管子按上述一组应力(电压)水平顺序进行定时转换步加试验, 得到的试验数据如题表 13.3 所列。

题表 13.3 试验数据三

电压/V	持续时间/h	失效个数	失效时间/h
38	1 000	3	336,600,888
41	600	4	168,312,408,524
44	250	4	144,164,184,240
47	125	4	48,66,84,102

试评估该二极管在正常应力水平(电压 28 V)下的平均寿命。

第 14 章 耐久试验数据分析与寿命评估

在规定条件下,产品从开始使用到首次翻修的工作时间(或日历持续时间)称为“首次翻修期限”,简称“首翻期”。在规定条件下,产品的两次相继翻修间的工作时间称为“翻修间隔期限”。这里“翻修”指把产品分解成零部件后进行清洗、检查,并通过修复或替换故障零部件,使产品寿命恢复到产品技术文件规定的水平。

翻修后最理想的结果是“修复如新”,使产品寿命恢复到等于首翻期。但在不少情况下,只能使产品寿命恢复到接近首翻期。

在规定条件下,产品从开始使用到规定退役的工作时间(或日历持续时间)称为产品的“总寿命”。总寿命期内包括若干次翻修活动。

产品从制造完成到出现不可修复的故障或不能接受的故障率的时间称做“使用寿命”。产品的寿命 T 是一个随机变量。令 p 为一百分数,设

$$P(T \leq T_p) = p \quad \text{即} \quad P(T > T_p) = 1 - p = q$$

称 T_p 为“ p 寿命”。 p 通常取 5 % (对可靠性要求高的,可取 1 %),这时叫“5 % 寿命”。如美国工业轴承的使用寿命常取 5 % 寿命,但导弹发动机的使用寿命则常取 1 % 寿命(一般情况下,产品到达 5 % 寿命时,并非指 5 % 的产品完全不能使用,只是功能上有些超差)。从 p 寿命的定义,可以看出 $R(T_p) = P(T \geq T_p) = q$, T_p 称为可靠水平为 q 的可靠寿命。因此, p 寿命也就是 q 可靠寿命。

产品在规定条件下储存时,仍能满足规定质量要求(其中很重要的是可靠性要求)的时间长度称做“储存寿命”。

耐久试验的目的是得到产品的 p 寿命(或 q 可靠寿命)。首翻期就是一种 p 寿命。本章简单介绍几种常用的耐久试验数据的可靠性评估方法。

14.1 极小样本情形下寿命分析的工程经验法

对于贵重产品耐久性的评估,样本量非常小。例如,飞机的场内寿命试验,样本量 n 一般不超过 5,这就是所谓的极小样本。如果产品在寿命试验中,全部投试产品均未出现关联故障,如何确定产品的使用寿命呢?这是极小样本无失效情形下使用寿命的分析问题。

在工程中,指数分布是一种欠理想的分布。对此,陈家鼎等(1995)给出了可靠寿命的最优置信下限。具体如下:

设寿命 T 服从指数分布,平均寿命为 θ ,则对给定的可靠度 R ,可靠寿命为

$$t_R(\theta) = \theta \ln \frac{1}{R} \quad (14.1)$$

当置信度为 $1-\alpha$ 时, $t_R(\theta)$ 的最优置信下限为

$$t_{RL} = \frac{\ln R}{\ln \alpha} \sum_{i=1}^n t_i \quad (14.2)$$

其中, t_1, t_2, \dots, t_n 是投入试验产品无失效的试验时间。

假定仅投入两个产品 ($n=2$) 进行寿命试验, 到终止时间 T 为止均未发生失效, 于是

$$t_1 = t_2 = T$$

$$t_{RL} = \frac{\ln R}{\ln \alpha} 2T$$

这是一个极小样本。对如此小的样本量, 不能指望能求出很高的可靠寿命及可靠寿命高置信度的置信下限。

如果可靠度和置信度选取适中, $R=70\%$, $1-\alpha=2/3$, 则

$$t_{RL} = \frac{\ln 0.7}{\ln(1/3)} 2T = 0.6493T \approx \frac{T}{1.5}$$

20 世纪 50 年代以来, 航空系统曾长期采用产品首翻期的初始值 $T_0 = \frac{T}{K}$, K 为经验系数, 一般取 1.5 (适用于各型产品的具体数值由生产方与使用方协商确定)。如上所述, 陈家鼎等 (1995) 的结果为此提供了一定的理论依据。

实践表明, 很多产品的寿命分布为两参数威布尔分布。杨为民等^[6,7] 对寿命为两参数威布尔分布的情况进行了大量模拟试验, 得出如下方法 (记试验样本量为 n , 故障数为 r):

① $r=0$, 即试验没有出现关联失效, 这时, 可靠度为 R 的可靠寿命为

$$T_0 = T/K \quad (14.3)$$

② $r=n$, 即试验到 $t_{(n)}$ 终止, 产品全部失效, 这时, 可靠度为 R 的可靠寿命为

$$T_{0n} = \sum_{i=1}^n t_i / nK_1 \quad (14.4)$$

t_i 是第 i 个产品的失效时间, $t_{(1)}, t_{(2)}, \dots, t_{(n)}$ 是 t_1, t_2, \dots, t_n 按从小到大排列所得的顺序统计量。

③ $n>r>0$, 即试验到 t_0 截止时, 有 r 个产品发生了关联失效, 其可靠度为 R 的可靠寿命为

$$T_{0r} = \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_0 \right] / nK_0 \quad (14.5)$$

K, K_1, K_0 为经验修正系数。对不同的威布尔分布参数 m 的值和不同的置信度 $1-\alpha$, 其值见附表 B.13。

把产品按其发生故障后可能导致影响后果的严重程度分为

A类:直接危及安全;

B类:影响任务完成;

C类:其他。

在 $n=2\sim 3, m=2.5\sim 4$ 的情况下,建议选取

A类: $R=80\%, \alpha=20\%$;

B类: $R=70\%, \alpha=20\%$;

C类: $R=70\%, \alpha=30\%$ 。

在 $n=2, m=2.5\sim 3, R=70\%\sim 80\%, \alpha=20\%\sim 30\%$ 时,建议选取

A类: $K=1.5\sim 2$;

B类: $K=1.3\sim 1.5$;

C类: $K=1.2\sim 1.4$ 。

按此方案指导“运七”飞机 177 项产品场内试验,结果是满意的。

14.2 参数蜕化情况下的使用寿命分析

产品在使用(储存也可看作一种使用)中,产品的特性参数 Y 变化到超出临界值 y_0 ,称为失效。产品从出厂到其特性参数超过临界值所持续的时间,称为使用寿命。

批产品的特性参数 Y 一般服从均值为 $\mu(t)$ 、标准差为 $\sigma(t)$ 的正态分布,即 $Y \sim N(\mu(t), \sigma^2(t))$ 。一种典型情况是 $\mu(t)$ 随时间 t 的增加而单调下降,当 $t=t_0$ 时, $\mu(t_0)=y_0$,如图14.1所示。

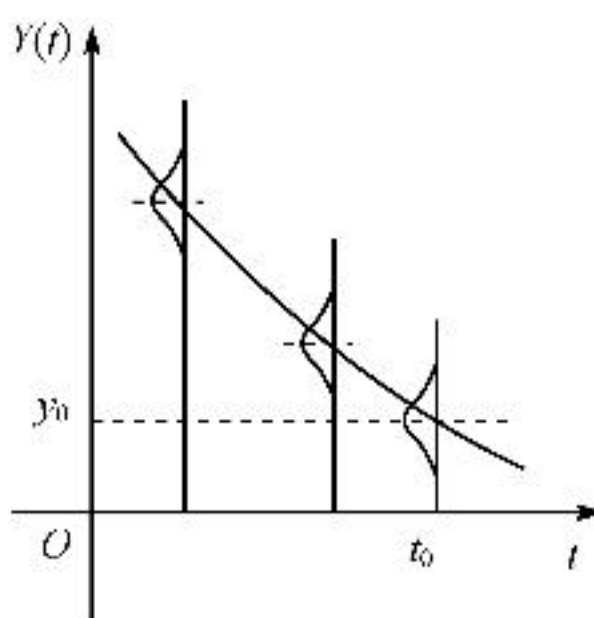


图 14.1 $Y(t)-t$ 曲线

不能认为 t_0 为产品的使用寿命。因为到 $t=t_0$ 时, Y 的均值 $\mu(t_0)=y_0$,则大体上批产品的特性参数值有一半已低于 y_0 ,即在 t_0 以前,已有一半的产品失效。因此,需要寻找一个比 t_0 小的时间 t^* ,使得在给定置信水平 γ 下,有

$$P[Y(t^*) \geq y_0] = \gamma \quad (14.6)$$

γ 一般取 90%, 80%; 有时也取 95%, 99%。这样, t^* 就是产品寿命置信度为 γ 的置信下限。另一种典型情况是: $\mu(t)$ 随时间 t 的增加而单调上升,处理方法与上述情形类似。

为确定产品的 p 使用寿命,需要得到产品特性参数 Y 的蜕化规律 $Y(t)$ 。具体步骤如下:

确定 k 个测试时刻 $t_i (i=1, 2, \dots, k)$, 在 t_i 时刻抽取 n_i 个样品,测得其特性参数值 $y_{ij} (i=1, 2, \dots, k; j=1, 2, \dots, n_i)$ 。把诸点 (t_i, y_{ij}) 在 $Y(t)-t$ 坐标纸或半对数、双对数坐标纸上描出。较多情况下,特性参数的蜕化规律在直角、半对数或双对数坐标纸上基本上是线性的。以在 $Y(t)-t$ 坐标纸诸点 (t_i, y_{ij}) 基本上呈一条直线为例,可以认为

$$\left. \begin{aligned} \mu(t) &= \alpha + \beta t \\ Y(t) &= \alpha + \beta t + \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (14.7)$$

通常假定 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, 其中 σ 为产品数据的标准差, 这里假设为常数 (如果蜕化规律不是线性的, 数据散布程度有随时间变化的趋势, 则数学处理上要复杂一些, 这里不展开讨论)。

在数据测试相互独立及数据散布程度相同的前提下, 采用最小二乘法估计参数 α, β , 则

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{\sum ty - n \bar{t} \cdot \bar{y}}{\sum t^2 - n \bar{t}^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta} \bar{t} \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i t_i, & n &= \sum_{i=1}^k n_i, & \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\ \sum ty &= \sum_{i=1}^k t_i \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, & \sum t^2 &= \sum_{i=1}^k n_i t_i^2, & \sum y^2 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 \end{aligned}$$

σ^2 的估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \left[\sum y^2 - n \bar{y}^2 - \hat{\beta} \left(\sum ty - n \bar{t} \cdot \bar{y} \right) \right] \quad (14.9)$$

对给定的置信度 γ 而言, 产品寿命的置信下限满足下列方程

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} t^* + t_{1-\gamma}(n-2) \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(t^* - \bar{t})^2}{\sum t^2 - n \bar{t}^2}} \cdot \hat{\sigma} = y_0 \quad (14.10)$$

其中, $t_{1-\gamma}(n-2)$ 指自由度为 $(n-2)$ 的 t 分布的 $1-\gamma$ 分位数。

例 14.1 某橡胶管的设计要求是: 破坏压力下限为 100 kg/cm^2 (9.8 MPa)。出厂时 ($t=0$) 及储存时间 $t=1, 2, 3$ 年各取三个样品进行爆破试验, 测得爆炸压力数据为

$t_1=0$: 233, 237, 226;

$t_2=1$: 223, 217, 第三个数据异常, 舍弃;

$t_3=2$: 215, 209, 206;

$t_4=3$: 205, 205, 196。

试估计橡胶管的储存期。给定 $\gamma=99\%$ 。

解: 经计算, 得

$$\bar{t} = 1.545, \quad \bar{y} = 215.36, \quad \sum t^2 = 41, \dots$$

由式(14.8)与式(14.9)计算 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}$ 得

$$\hat{\alpha} = 231.3, \quad \hat{\beta} = -10.3, \quad \hat{\sigma} = 4.347$$

由式(14.10)得关于 t^* 的方程为

$$231.3 - 10.3t^* - 2.821 \sqrt{\frac{12}{11} + \frac{(t^* - 1.545)^2}{41 - 11 \times 1.545^2}} \times 4.347 = 100$$

解之得

$$t^* = 9.86$$

故这种橡胶管的储存期约为 9 年 10 个月。

14.3 裂纹扩展寿命分析

很多结构件的实际应用载荷或应力往往随时间做交替变化。有些结构原来含有裂纹；有些结构原来没有裂纹，但在交变载荷或应力下，也会诱发产生裂纹。裂纹形成前的应力循环次数称为“无裂纹寿命”。当裂纹形成后，在应力循环下，裂纹会缓慢扩展，当扩展到一定尺寸时就发生断裂，即结构失效。这一段的应力循环次数称为“裂纹扩展寿命”。

预报带裂纹结构的剩余使用寿命是使用寿命分析的一项重要内容。

设 a 为裂纹半长，单位一般用 mm； N 为应力循环次数； ΔK 为应力强度因子幅值，单位采用 $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}$ ； C, n 指材料系数。

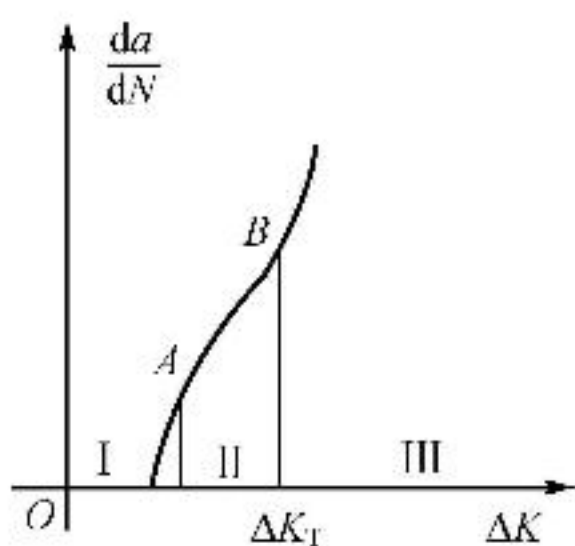
Paris 总结了很多断裂数据，提出了下述规律：

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad (14.11)$$

两端取对数，得

$$\ln \frac{da}{dN} = \ln C + n \ln(\Delta K) \quad (14.12)$$

以 $\ln(\Delta K)$ 为横坐标， $\ln \frac{da}{dN}$ 为纵坐标，则在直角坐标系中呈一条直线。实际上，以 ΔK 为横坐标， $\frac{da}{dN}$ 为纵坐标，在双对数坐标纸上表示的规律如图 14.2 所示。



当 ΔK 小于 ΔK_{th} 时， $\frac{da}{dN}$ 基本上测不到，该 ΔK_{th} 叫裂纹扩展的门槛值。设 σ_{max} 为最大应力， σ_{min} 为最小应力。把 $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$ 叫应力循环的“循环比”（例如 $R = -1$ 为对称型循环），则 ΔK_{th} 与材料特点及 R 有关，还与裂纹长度有关。

例如对于抗拉强度为 76 MPa 的铝而言，裂纹长度在 0.5~5 mm 之间时，有

$$R = -1, \quad \Delta K_{th} = 32.36$$

$$R = 0, \quad \Delta K_{th} = 52.17$$

$$R = 0.33, \quad \Delta K_{th} = 45.11$$

图 14.2 ΔK 与 $\frac{da}{dN}$ 关系图

$$R = 0.53, \quad \Delta K_{th} = 38.25$$

又如对抗拉强度为 431 MPa 的镍而言,裂纹长度在 0.5~5 mm 之间时,有

$$R = -1, \quad \Delta K_{th} = 187.31$$

$$R = 0, \quad \Delta K_{th} = 250.08$$

$$R = 0.33, \quad \Delta K_{th} = 204.97$$

$$R = 0.53, \quad \Delta K_{th} = 162.79$$

详细数据可查这方面的专业书,要注意的是当裂纹长度大时,相应的 ΔK_{th} 也大。

图 14.2 中的 A 点和 B 点之间基本上是一段直线,这就是可应用 Paris 公式的一段。在双对数坐标纸上, n 就是这段直线的斜率。直线延长线与纵坐标轴交点的刻度即为 C 。

不同材料的 C, n 值有很大差别。如马氏体钢的 $C = 5.875 \times 10^{-6}, n = 2.25$; 奥氏体钢的 $C = 7.788 \times 10^{-14}, n = 3.25$ 。

图 14.2 中的曲线在过了 B 点后, $\frac{da}{dN}$ 急剧增加,裂纹迅速扩展。B 点相应的 ΔK 值记为 ΔK_T , 叫上限门槛值。

Forman 将 Paris 公式加以修正,引入了 R 及一个常数 K_c , 公式修正为

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (14.13)$$

从该公式可看出:当 ΔK 大到一定程度时, $\frac{da}{dN}$ 会迅速增加,因此还可以反映出一些接近 B 点后的规律。

具体的裂纹扩展寿命计算可参见断裂力学专著。这里仅以一个简单的例子说明分析计算的思路。

记最小的可检测到的裂纹半长为 a_0 , 临界(将要失效)的裂纹半长为 a_f , 以裂纹半长为 a_0 时的应力循环次数作为 $N=0$ 算起,到裂纹半长扩展到临界 a_f 时的裂纹扩展寿命为 N_f , 则按 Paris 公式(14.11), 有

$$dN = \frac{da}{C(\Delta K)^n}$$

积分得

$$N_f = \int_0^{N_f} dN = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{C(\Delta K)^n} da \quad (14.14)$$

其中, ΔK 与 a 有关,不同裂纹特性的规律不同。将 $\Delta K(a)$ 代入上式后积分,即可得到裂纹扩展寿命 N_f 。

例 14.2 某一层板上有初始裂纹半长 $a_0 = 2$ mm。所受交变载荷 $\Delta\sigma = 100$ MPa。此种材料的 $C = 2 \times 10^{-13}, n = 3$ 。设已知临界裂纹半长 $a_f = 30$ mm。求裂纹扩展寿命 N_f (已知 $\Delta K = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi a}$)。

解：将 $\Delta K(a)$ 代入式(14.14)，得

$$N_f = \int_{a_0}^{a_f} \frac{1}{C(\Delta\sigma \sqrt{\pi a})^n} da = \frac{1}{C(\Delta\sigma)^n \pi^{n/2}} \frac{a_f^{1-n/2} - a_0^{1-n/2}}{1 - \frac{n}{2}}$$

将 $a_0 = 2 \text{ mm}$, $\Delta\sigma = 100 \text{ MPa}$, $a_f = 30 \text{ mm}$, $C = 2 \times 10^{-13}$, $n = 3$ 代入上式，得

$$N_f = \frac{1}{2 \times 10^{-13} 100^3 \pi^{3/2}} \frac{30^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}}{1 - \frac{3}{2}} \text{ 次} = 0.942 \times 10^6 \text{ 次}$$

按照美国机械工程师学会推荐的安全系数 20，可得 N_f 的安全值为

$$(0.942 \times 10^6 / 20) \text{ 次} = 4.7 \times 10^4 \text{ 次}$$

14.4 疲劳寿命分析

常用的疲劳寿命分析方法是根据 Miner 法则进行的。Miner 在大量实践的基础上，总结了如下法则：

- ① 材料受到一次应力 S_i 的作用后，就受到一定的相应损伤量 X_i ；
- ② 材料受到一系列应力作用后，其损伤按线性叠加的规律累积；
- ③ 材料受到的损伤累积超过材料能忍受的上限 w 时，材料就破坏了。

按照 Miner 法则，对应于一定的应力 S_i ，材料耐受此应力的次数，即寿命为

$$N_i = w / S_i \quad (14.15)$$

如果材料受到 k 种应力 S_1, S_2, \dots, S_k 的作用，作用次数分别为 n_1, n_2, \dots, n_k ，则材料受到的累积损害为

$$\sum_{i=1}^k n_i S_i = w \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (14.16)$$

当 $\sum_{i=1}^k n_i S_i = w$ ，即 $\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1$ 时，材料即破坏。

对材料而言，有一个应力下限 S_0 。如果材料的应力 $S_i \leq S_0$ ，则应力对材料没有损害作用，也就相当于 $N_0 = \infty$ 。

当 $S_i > S_0$ 时，相应的 $S_i - N_i$ 关系式从大量实验数据来看大体上有如下两类：

$$S = AN^{-m}, \quad S > S_0$$

$$S = a - b \lg N, \quad S > S_0$$

第一类的数据在双对数坐标纸上呈直线；第二类的数据在单对数坐标纸上呈直线。这些参数 A, m, a, b 根据试验数据确定。由此可内插（必要时可外推，但不宜外推太远）一定应力 S^* 下的寿命。一般采用点估计。需要时可用误差理论推导区间估计公式。

例 14.3 在汽车的典型工作部位上用应变测试仪测定应变的频数分布（可折算成应力的频数

分布)。将应变按其应变量为 5 个区间,区间的代表应变量(单位: 10^{-6})分别为 1 440, 1 170,1 000,830,500。对代表应变量分别进行疲劳试验,得 $S_i - N_i$ 对应关系,如表 14. 1 所列。

表 14.1 $S_i - N_i$ 对应关系

$10^6 \cdot S_i$	1 440	1 170	1 000	830	500
$10^{-4} \cdot N_i$	8	30	100	600	$\approx \infty$

现在 2 km 的典型路面上做行驶试验,测得不同应变量的频数见表 14. 2。

表 14.2 不同应变量的频数

$10^6 \cdot S_i$	1 440	1 170	1 000	830	500
N_i	2	4	8	23	60

试计算汽车在典型路面的耐久寿命。

解：一次 2 km 典型路面行驶对汽车的累积损伤为

$$\sum_{i=1}^k n_i S_i = w \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i}$$

将试验数据代入,由于 500×10^{-6} 对汽车没有损伤作用,因此该应变量为忽略不计,则

$$w \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = w \left(\frac{2}{8 \times 10^4} + \frac{4}{30 \times 10^4} + \frac{8}{100 \times 10^4} + \frac{23}{600 \times 10^4} \right) = w \times 0.502 \times 10^{-4}$$

当行驶到 m 个 2 km 典型路面时,累积损伤达到 w ,汽车将破坏,故

$$m \times 0.502 \times 10^{-4} = 1$$

解之得 $m = 19\,920 \approx 2 \times 10^4$ 。从而汽车在典型路面行驶的耐久寿命约为 4×10^4 km。

习 题

14.1 某轮齿弯曲疲劳寿命的实验数据如题表 14.1 所列,试计算其在应力 220 MPa 时的疲劳寿命。

题表 14.1 轮齿弯曲疲劳寿命(应力循环次数 $10^{-6} \cdot N$)

应力/MPa 序 号	293.96	275.35	256.78	238.24
1	0.155 2	0.175 5	0.277 9	0.379 5
2	0.163 4	0.193 6	0.301 0	0.499 8

续题表 14.1

应力/MPa 序 号	293.96	275.35	256.78	238.24
3	0.177 9	0.245 5	0.343 6	0.597 6
4	0.190 2	0.313 2	0.388 6	0.677 8
5	0.193 3	0.366 4	0.510 2	0.909 8
6	0.280 5	0.399 6	0.606 5	1.140 5
7	0.363 3	0.542 3	0.678 8	1.320 4

14.2 某激光器工作电流在一定温度下随时间变化的试验数据如题表 14.2 所列,失效阈值为 10(即工作电流增加 10 %,激光器失效无法工作),并假设工作电流数据服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 。在置信水平 $\gamma=0.99$ 的条件下,试估计激光器的工作寿命。

题表 14.2 某激光器工作电流在某温度下随时间变化的百分比记录

时间/h 序 号	250	500	750	1 000	1 250	1 500	1 750	2 000	2 250	2 500	2 750	3 000	3 250	3 500	3 750	4 000
1	0.47	0.93	2.11	2.72	3.51	4.34	4.91	5.48	5.99	6.72	7.13	8	8.92	9.49	9.87	10.94
2	0.71	1.22	1.9	2.3	2.87	3.75	4.42	4.99	5.51	6.07	6.64	7.16	7.78	8.42	8.91	9.28
3	0.71	1.17	1.73	1.99	2.53	2.97	3.3	3.94	4.16	4.45	4.89	5.27	5.69	6.02	6.45	6.88
4	0.36	0.62	1.36	1.95	2.3	2.95	3.39	3.79	4.11	4.5	4.72	4.98	5.28	5.61	5.95	6.14
5	0.27	0.61	1.11	1.77	2.06	2.58	2.99	3.38	4.05	4.63	5.24	5.62	6.04	6.32	7.10	7.59
6	0.36	1.39	1.95	2.86	3.46	3.81	4.53	5.35	5.92	6.71	7.7	8.61	9.15	9.95	10.49	11.01
7	0.36	0.92	1.21	1.46	1.93	2.39	2.68	2.94	3.42	4.09	4.58	4.84	5.11	5.57	6.11	7.17
8	0.46	1.07	1.42	1.77	2.11	2.4	2.78	3.02	3.29	3.75	4.16	4.76	5.16	5.46	5.81	6.24
9	0.51	0.93	1.57	1.96	2.59	3.29	3.61	4.11	4.6	4.91	5.34	5.84	6.4	6.84	7.2	7.88
10	0.41	1.49	2.38	3.00	3.84	4.5	5.25	6.26	7.05	7.8	8.32	8.93	9.55	10.45	11.28	12.21
11	0.44	1	1.57	1.96	2.51	2.84	3.47	4.01	4.51	4.8	5.2	5.66	6.2	6.54	6.96	7.42
12	0.39	0.8	1.35	1.74	2.98	3.59	4.03	4.44	4.79	5.22	5.48	5.96	6.23	6.99	7.37	7.88
13	0.3	0.74	1.52	1.85	2.39	2.95	3.51	3.92	5.03	5.47	5.84	6.5	6.94	7.39	7.85	8.09
14	0.44	0.7	1.05	1.35	1.8	2.55	2.83	3.39	3.72	4.09	4.83	5.41	5.76	6.14	6.51	6.88
15	0.5	0.83	1.29	1.52	1.91	2.27	2.78	3.42	3.78	4.11	4.38	4.63	5.38	5.84	6.16	6.62

第 15 章 可靠性评估的 Bayes 方法

Bayes 可靠性评估是一种综合经验信息进行可靠性评估的方法。Bayes 方法假设可靠性指标有一个“先验分布”，这个先验分布根据历史资料和经验信息等确定。根据先验分布和试验数据导出“后验分布”，然后从这个后验分布可以得出可靠性指标的 Bayes 推断，包括点估计和区间估计。

Bayes 方法的特点就在于这个先验分布。由于有了先验分布，不需要很大的样本就可以得到较好的估计，这是 Bayes 方法的优点。另一方面，可以考虑的先验分布有很多种，但是怎样知道先验分布的选取是否符合实际，并没有一个较好的、统一的方法，这是 Bayes 方法的一大问题。于是，人们根据经验数据来确定先验分布，发展了经验 Bayes 方法。在经典统计学中，可靠性是一个客观存在的定值，不是随机变量。Bayes 方法假设可靠性本身是一个随机变量，这是 Bayes 方法在理论上的基本观点。

近来，Bayes 方法得到了很大的发展与广泛的应用，形成了与经典统计既相互竞争，又相互支持、共同发展的局面。当然，人们越来越多地关注其实用价值，也就是解决实际问题的能力。本章首先对 Bayes 方法进行简单介绍，然后讨论 Bayes 方法在可靠性评估中的应用。

15.1 Bayes 统计简介

15.1.1 Bayes 统计的基本出发点

统计学中有两个主流学派：频率学派（又称经典学派）和 Bayes 学派，它们之间的异同点可从统计推断所使用的三种信息中看出。

(1) 总体信息

总体信息即总体分布和总体所属分布簇给出的信息。例如，“总体是正态分布”这句话给出了很多信息：其密度函数呈钟形曲线；它的一切阶矩都存在；利用正态样本可以得到均值和方差的点估计和区间估计，还有很多成熟的假设检验方法可供人们选用。因此，确定总体分布是很重要的基础工作。一旦总体分布确定，将给统计推断带来很多信息。

(2) 样本信息

样本信息即从总体中抽取的样本给出的信息。人们希望通过对样本的加工和处理来对总体的某些特征作出较为精确的统计推断。没有样本就没有统计推断，样本信息是最重要的信息。

基于上述两种信息的统计推断被称为经典统计学,它的基本观点是把数据(样本)看成是来自具有一定概率分布的总体,研究的对象是这个总体而不局限于数据本身。经典统计学在工业、农业、医学、经济、管理、军事等领域获得了广泛的应用,同时又不断提出新的统计问题,这促进了经典统计学的发展,也暴露了它的缺陷。除了上述两种信息以外,实际中还存在第三种信息——先验信息,它也用于统计推断。

(3) 先验信息

先验信息即在抽样之前有关统计问题的一些信息,一般说来,先验信息主要来源于经验和历史资料。先验信息在日常生活和工作中也经常见到,不少人在自觉或不自觉地使用它,比如“免检产品”。

基于上述三种信息(总体信息、样本信息和先验信息)进行的统计推断被称为 Bayes 统计学。它与经典统计学的主要差别在于是否利用先验信息,此外,在使用样本信息上也存在差异。Bayes 学派重视已出现的样本观测值,而对尚未发生的样本观测值不予考虑;Bayes 学派非常重视先验信息的收集、挖掘和加工,并使之数量化,形成先验分布,参加到统计推断中来,以提高统计推断的质量。

Bayes 统计起源于英国学者 Bayes(1702—1761)死后才得以发表的一篇论文《论有关机遇问题的求解》。经过诸多统计学家的努力,如今 Bayes 统计已趋成熟,Bayes 学派已发展成为有影响的统计学派,并打破了经典统计学一统天下的局面。

Bayes 学派最基本的观点是:任一未知量 θ 都可看作是一个随机变量,应该用一个概率分布去描述对 θ 的未知状况。这个概率分布在抽样前就有关于 θ 的先验信息的概率陈述。这个概率分布被称为先验分布,简称先验。因为任一未知量都有不确定性,而在表述不确定性程度时,概率与概率分布是最好的描述语言。

15.1.2 先验分布与后验分布

1. Bayes 公式

Bayes 公式有多种形式,为简单起见,首先介绍它的事件形式,随后详细给出其密度函数形式。首先来看一下 Bayes 公式的事件形式。设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 互不相容,并且 $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ (必然事件),则对于任一事件 B ,有

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B | A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15.1)$$

下面用随机变量的密度函数叙述 Bayes 公式,从中介绍 Bayes 学派的一些具体想法。

① 在经典统计中,依赖于未知参数 θ 的密度函数记为 $p(x; \theta)$ 或 $p_\theta(x)$,它表示在参数空间 $\Theta = \{\theta\}$ 中,不同的 θ 对应不同的分布。而在 Bayes 统计中,密度函数记为 $p(x|\theta)$,它表示在随机变量 θ 给定某个值时,总体指标 X 的条件分布。

② 根据 θ 的先验信息确定 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$, 这是 Bayes 学派在最近几十年中重点研究的问题, 已有一批富有成效的确定先验分布的方法。

③ 从 Bayes 观点来看, 样本 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的产生要分两步进行。首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 中产生一个参数 θ ; 第二步在给定 θ 下, 从总体分布 $p(x|\theta)$ 中产生一个样本 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。该样本发生的概率与如下联合概率函数成正比, 即

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta)$$

这个函数常称为似然函数, 记为 $L(\theta)$ 。频率学派和 Bayes 学派都承认似然函数, 两派都认为: 在有了样本之后, 总体和样本中所含 θ 的信息都被包含在似然函数 $L(\theta)$ 之中, 不过, 在使用似然函数进行统计推断时, 两派之间存在差异, 这将在后面说明。

④ 样本 x 和参数 θ 的联合分布为

$$h(x, \theta) = p(x|\theta)\pi(\theta)$$

它把三种可用的信息都综合进去了。

⑤ 现在的任务是要对未知参数 θ 作出统计推断。在没有样本信息时, 只能根据先验分布 $\pi(\theta)$ 对 θ 作出推断。在有样本观测值后, 应根据联合分布 $h(x, \theta)$ 对 θ 作出推断。为此需要把 $h(x, \theta)$ 作如下分解:

$$h(x, \theta) = h(\theta|x)m(x)$$

其中, $m(x)$ 是 x 的边际密度函数, 且

$$m(x) = \int_{\Theta} h(x, \theta) d\theta = \int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta) d\theta$$

它与 θ 无关, 或者说, $m(x)$ 中不含 θ 的任何信息; 其中, Θ 是 θ 的取值空间。因此能用来对 θ 作出推断的仅仅是条件分布 $h(\theta|x)$, 它的计算公式为

$$h(\theta|x) = \frac{h(x, \theta)}{m(x)} = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (15.2)$$

这就是 Bayes 公式的密度函数形式。在样本 x 给定下, θ 的条件分布被称为 θ 的后验分布。后验分布集中了总体、样本和先验等三种信息中有关 θ 的一切信息, 而又排除了一切与 θ 无关的信息之后所得的结果, 所以基于后验分布 $h(\theta|x)$ 对 θ 进行统计推断是更为有效的, 也是更为合理的。

⑥ 当 θ 是离散随机变量时, 先验分布可用先验分布列 $\pi(\theta_i) (i=1, 2, \dots)$ 表示。这时后验分布也是离散形式, 即

$$h(\theta_i|x) = \frac{p(x|\theta_i)\pi(\theta_i)}{\sum_j p(x|\theta_j)\pi(\theta_j)}, \quad i=1, 2, \dots \quad (15.3)$$

若总体 X 也是离散的, 则只需把式 (15.2) 和式 (15.3) 中的密度函数 $p(x|\theta)$ 看作概率函数 $P(X=x|\theta)$ 即可。

后验分布是三种信息的综合, 一般说来, 先验分布 $\pi(\theta)$ 反映人们在抽样前对 θ 的认识, 后

验分布 $h(\theta|x)$ 反映人们在抽样后对 θ 的认识。它们之间的差异反映样本出现之后人们对 θ 认识的一种调整。

例 15.1 设事件 A 的概率为 θ , 即 $\pi(A)=\theta$ 。为了估计 θ 而作 n 次独立观测, 其中事件 A 出现次数为 X , 显然, X 服从二项分布 $B(n, \theta)$, 即

$$P(X=x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,\cdots,n$$

这就是似然函数。假如在试验前对事件 A 没有什么了解, 从而对其发生的概率 θ 也说不出是大是小。在这种场合, Bayes 建议用区间 $(0,1)$ 上的均匀分布 $U(0,1)$ 作为 θ 的先验分布。因为它在 $(0,1)$ 上每一点机会均等, 没有偏爱。Bayes 的这个建议被后人称为 Bayes 假设。这时 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15.4)$$

为综合抽样信息和先验信息, 可利用 Bayes 公式, 为此先计算样本 X 与参数 θ 的联合分布

$$h(x, \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,\cdots,n, \quad 0 < \theta < 1$$

此式在定义域上与二项分布有差别。再计算 X 的边际分布

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_0^1 h(x, \theta) d\theta = \\ &= \binom{n}{x} \int_0^1 \theta^x (1-\theta)^{n-x} d\theta = \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)} = \\ &= \frac{1}{n+1}, \quad x=0,1,\cdots,n \end{aligned}$$

最后得到 θ 的后验分布

$$h(\theta|x) = \frac{h(x, \theta)}{m(x)} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \theta^{(x+1)-1} (1-\theta)^{(n-x+1)-1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (15.5)$$

该分布恰好是参数为 $x+1$ 和 $n-x+1$ 的贝塔分布, 记为 $\beta(x+1, n-x+1)$ 。

2. 共轭先验分布

设 θ 是总体分布中的参数(或参数向量), $\pi(\theta)$ 是 θ 的先验密度函数, 假如由抽样信息算得的后验密度函数与 $\pi(\theta)$ 有相同的函数形式, 则称 $\pi(\theta)$ 是 θ 的共轭先验分布。应该指出, 共轭先验分布是对某一分布中的参数而言的, 如正态均值、正态方差、泊松均值等。离开指定参数及其所在的分布, 谈论共轭先验分布是没有意义的。

例 15.2 正态均值(方差已知)的共轭先验分布是正态分布。设 x_1, x_2, \cdots, x_n 是来自正态分

布 $N(\theta, \sigma^2)$ 的一组样本观测值, 其中 σ^2 已知。此样本的似然函数为

$$p(x | \theta) = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}, \quad -\infty < x_1, x_2, \dots, x_n < \infty \quad (15.6)$$

现取另一个正态分布 $N(\mu, \tau^2)$ 作为正态均值 θ 的先验分布, 即

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\theta - \mu)^2}{2\tau^2}}, \quad -\infty < \theta < \infty \quad (15.7)$$

其中, μ 和 τ^2 已知, 由此可以写出样本 x 与参数 θ 的联合密度函数

$$h(x, \theta) = k_1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n\theta^2 - 2n\theta\bar{x} + \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} + \frac{\theta^2 - 2\mu\theta + \mu^2}{\tau^2} \right) \right]$$

其中, $k_1 = (2\pi)^{-(n+1)/2} \tau^{-1} \sigma^{-n}$, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 。若再记

$$\sigma_0^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad A = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2}, \quad B = \frac{\bar{x}}{\sigma_0^2} + \frac{\mu}{\tau^2}, \quad C = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\mu^2}{\tau^2}$$

则有

$$h(x, \theta) = k_1 e^{-\frac{1}{2}(A\theta^2 - 2\theta B + C)} = k_2 e^{-\frac{(\theta - B/A)^2}{2/A}}$$

其中, $k_2 = k_1 e^{-\frac{1}{2}(C - B^2/A)}$ 。由此容易算得样本 x 的边缘分布

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, \theta) d\theta = k_2 \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

上面两式相除, 即得 θ 的后验分布

$$h(\theta | x) = \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\theta - B/A)^2}{2/A}} \quad (15.8)$$

这是正态分布, 其均值 μ_1 和方差 τ_1^2 分别为

$$\mu_1 = \frac{B}{A} = \frac{\bar{x}\sigma_0^{-2} + \mu\tau^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \tau^{-2}}, \quad \frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2} \quad (15.9)$$

这就是说正态均值(方差已知)的共轭先验分布是正态分布。例如, 设 $X \sim N(\theta, 2^2)$, 并且 $\theta \sim N(10, 3^2)$ 。若从正态总体 X 得到样本量为 5 的样本, 其均值 $\bar{x} = 12.1$, 则由式(15.9)计算得到 $\mu_1 = 11.93$ 和 $\tau_1^2 = (6/7)^2$ 。这样得到正态均值 θ 的后验分布为正态分布 $N(11.93, (6/7)^2)$ 。

在给定样本分布 $p(x|\theta)$ 和先验分布 $\pi(\theta)$ 后, 可用 Bayes 公式计算 θ 的后验分布

$$h(\theta | x) = p(x | \theta)\pi(\theta)/m(x)$$

由于 $m(x)$ 不依赖于 θ , 在计算 θ 的后验分布中仅起到一个正则化因子的作用。假如把 $m(x)$ 省略, 把 Bayes 公式改写为如下等价形式

$$h(\theta | x) \propto p(x | \theta)\pi(\theta) \quad (15.10)$$

其中,符号“ \propto ”表示两边仅相差一个不依赖于 θ 的常数因子。式(15.10)右端是后验分布 $h(\theta|x)$ 的核,因为一旦知道核就知道了后验分布,所以可通过计算后验的核来简化后验分布的计算,这在共轭先验分布和非共轭先验分布场合都适用。

例如在例 15.2 中正态均值 θ 的先验分布 $\pi(\theta)$ 取为另一个正态分布 $N(\mu, \tau^2)$ 。在 μ 和 τ^2 已知的情况下, θ 的后验分布为

$$\begin{aligned} h(\theta | x) &\propto p(x | \theta)\pi(\theta) \propto \\ &\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}{\sigma^2} + \frac{(\theta - \mu)^2}{\tau^2}\right]\right\} \propto \\ &e^{-\frac{1}{2}(A\theta^2 - 2B\theta)} \propto \\ &e^{-\frac{A}{2}(\theta - B/A)^2} \end{aligned}$$

其中, A 与 B 如前所述,就像略去 $m(x)$ 一样,上面几步中把与 θ 无关的因子略去,从最后结果看出,后验分布是正态分布,其均值为 B/A , 方差为 A^{-1} 。这就简化了计算。表 5.1 所列为常用的共轭先验分布。

表 15.1 常用的共轭先验分布

总体分布	参 数	共轭先验分布
二项分布	成功概率	贝塔分布 $\beta(\alpha, \beta)$
泊松分布	均 值	伽马分布 $\Gamma(\alpha, \lambda)$
指数分布	均值的倒数	伽马分布 $\Gamma(\alpha, \lambda)$
正态分布(方差已知)	均 值	正态分布 $N(\mu, \tau^2)$
正态分布(均值已知)	方 差	逆伽马分布 $\Gamma(\alpha, \lambda)$
正态分布	均值和方差(联合)	正态-逆伽马分布 $N-IG(\nu_0, \mu_0, \sigma_0^2)$
d 维正态分布 $N_d(\theta, \Sigma)$, (Σ 已知)	d 维均值向量	d 维正态分布 $N_d(\mu, \Lambda)$, 其中 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)'$, Λ 为 d 阶正定阵
多项分布 $M_k(n; \theta_1, \dots, \theta_k)$	$(\theta_1, \dots, \theta_k)$	Dirichlet 分布 $D(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

共轭先验分布的优点是计算方便,后验分布的一些参数,特别是后验均值可得到很好的解释。这可以从下面的例子中体会。

例 15.3 在“正态均值 θ 的共轭先验分布为正态分布”的例 15.2 中,其后验均值 μ_1 (见式(15.9))可改写为

$$\mu_1 = \frac{\sigma_0^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \tau^{-2}} \bar{x} + \frac{\tau^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \tau^{-2}} \mu = \gamma \bar{x} + (1 - \gamma) \mu$$

其中, $\gamma = \sigma_0^{-2} / (\sigma_0^{-2} + \tau^{-2})$ 是用方差倒数组成的权, 于是后验均值 μ_1 是样本均值 \bar{x} 和先验均值 μ 的加权平均。这表明后验均值是在先验均值与样本均值间进行折中。

在处理正态分布时, 方差的倒数发挥着重要作用, 称其为精度, 于是在正态均值的共轭先验分布的讨论中, 其后验方差 τ_1^2 所满足的等式(见式(15.9))为

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau^2} = \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}$$

可解释为: 后验分布的精度是样本均值分布的精度与先验分布精度之和, 增加样本量 n 或者减少先验方差都有利于提高后验分布的精度。

在 Bayes 分析中先验分布的选取应以合理性作为首要原则, 计算上的方便与先验的合理性相比总还是第二位的。当样本均值和先验均值相距较远时, 直观上后验分布应该有两个峰才更为合理。如果使用共轭先验分布(若在正态均值场合)逼近, 使后验分布只有一个峰, 就会掩盖实际情况, 引起误用。在考虑到先验合理性的基础上, 充分发挥共轭先验分布的计算方便的特长才是应该采取的策略。除了这里介绍的 Bayes 假设和共轭先验分布之外, 还有很多确定先验分布的方法, 像 Jeffreys 先验、最大熵先验、直方图法、变分度法与定分度法、多层先验等, 具体可参阅参考文献[8,9]。

3. 超参数的确定

先验分布中所含的未知参数称为超参数。共轭先验分布中常含有超参数, 如何利用先验信息来确定超参数是使用 Bayes 方法要研究的问题。下面结合贝塔分布来介绍几种超参数的确定方法。这些方法在其他分布场合也都适用。

例 15.4 二项分布中成功概率 θ 的共轭先验分布是贝塔分布 $\beta(\alpha, \beta)$, 其中 α, β 是两个超参数。国内外文献中对 α, β 的确定已有多种方法, 现综述如下。

(1) 先验矩方法

若用先验信息能获得成功概率 θ 的若干估计值, 记为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, 一般它们可从历史数据整理加工中获得, 由此可计算前两阶先验矩 μ_1 和 μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \theta_i, \quad \mu_2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \theta_i^2$$

然后令其分别等于贝塔分布 $\beta(\alpha, \beta)$ 的一、二阶矩, 解之, 可得

$$\hat{\alpha} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1^2}, \quad \hat{\beta} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1^2} (1 - \mu_1)$$

(2) 先验分位数方法

假如根据先验信息可以确定贝塔分布的两个分位数, 则可利用这两个分位数来确定 α, β , 例如用上、下四分位数 θ_U 与 θ_L 来确定 α, β 。 θ_U 与 θ_L 分别满足如下两个方程:

$$\int_0^{\theta_L} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} d\theta = 0.25$$

$$\int_{\theta_U}^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} d\theta = 0.25$$

从这两个方程解出 α, β 即可确定超参数。

(3) 先验均值和先验分位数方法

若能得到先验均值 $\bar{\theta}$ 和先验分布的 p 分位数 θ_p , 则可列出下列方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} &= \bar{\theta} \\ \int_0^{\theta_p} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1} d\theta &= p \end{aligned} \right\}$$

用数值方法求解上述方程组, 即可得到超参数 α, β 的数值解。

(4) 其他方法

假如根据先验信息只能获得先验均值 $\bar{\theta}$, 这时可令

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \bar{\theta}$$

但一个方程不能唯一确定两个未知数, 这时还要利用其他先验信息才能把 α, β 确定下来。例如, 可借助使用者对先验均值 $\bar{\theta}$ 的可信程度的大小来确定 α, β , 如 $\bar{\theta} = 0.4$, 那么满足方程 $\alpha/(\alpha+\beta) = 0.4$ 的 α, β 有无穷多组解, 表 15.2 列出了若干组。从表 15.2 可见, 它们的方差 $\text{var}(\theta)$ 随着 $\alpha+\beta$ 的增大而减少, 意味着概率在向均值 $E(\theta)$ 集中, 从而提高人们对 $E(\theta) = 0.4$ 的确信程度, 这样一来, 选择 $\alpha+\beta$ 的问题转化为决策人对 $E(\theta) = 0.4$ 的确信程度大小的问题。若对 $E(\theta) = 0.4$ 很确信, 那么 $\alpha+\beta$ 可选得大些; 若对 $E(\theta) = 0.4$ 尚存疑虑, 那么 $\alpha+\beta$ 可选得小些。例如决策人对 $E(\theta) = 0.4$ 很确信, 从而选 $\alpha+\beta = 35$, 从表 15.2 可见, 此时 $\hat{\alpha} = 14, \hat{\beta} = 21$, 这样 θ 的先验分布就是贝塔分布 $\beta(14, 21)$ 。

表 15.2 贝塔分布中超参数与方差的关系

贝塔分布	α	$\alpha+\beta$	$E(\theta)$	$\text{var}(\theta)$
$\beta(2, 3)$	2	5	0.4	0.040 0
$\beta(4, 6)$	4	10	0.4	0.021 8
$\beta(8, 12)$	8	20	0.4	0.011 5
$\beta(10, 15)$	10	25	0.4	0.009 2
$\beta(14, 21)$	15	35	0.4	0.006 7

15.1.3 Bayes 推断

从 Bayes 观点看, 后验分布 $h(\theta|x)$ 集总体信息、样本信息和先验信息于一体, 全面描述了

参数 θ 的概率分布。因此有关参数 θ 的点估计、区间估计、假设检验等统计推断应该从后验分布 $h(\theta|x)$ 按需要提取有关信息。下面分别叙述几种 Bayes 推断形式。

1. Bayes 点估计

作为参数 θ 的点估计可选用后验分布 $h(\theta|x)$ 的某个位置特征数。常用的有后验期望、后验中位数和后验众数三种形式。其中,使后验分布 $h(\theta|x)$ 达到最大的值 $\hat{\theta}_{\max}$ 称为后验众数估计;后验分布的中位数 $\hat{\theta}_{\text{med}}$ 称为 θ 的后验中位数估计;后验分布的期望值 $\hat{\theta}_E$ 称为 θ 的后验期望估计,这三个估计都称为 Bayes 估计,记为 $\hat{\theta}_B$,在不引起混淆时,简记为 $\hat{\theta}$ 。

一般场合下,这三种 Bayes 估计是不同的。当后验密度函数对称时,这三种 Bayes 估计重合,例如后验分布为正态分布时,这三种 Bayes 估计相同。使用时可根据实际情况选用其中的一种估计,或者说,这三种估计是适应不同的实际需要而沿用至今的。

例 15.5 为估计不合格品率 θ ,今从一批产品中随机抽取 n 件,其中不合格品数 X 服从二项分布 $B(n, \theta)$ 。若取贝塔分布 $\beta(\alpha, \beta)$ 作为先验分布,且超参数 α, β 已知,则后验分布为贝塔分布 $\beta(\alpha+x, \beta+n-x)$ 。这时不合格品率 θ 的后验众数估计 $\hat{\theta}_{\max}$ 和后验期望估计 $\hat{\theta}_E$ 分别为

$$\hat{\theta}_{\max} = \frac{\alpha+x-1}{\alpha+\beta+n-2}, \quad \hat{\theta}_E = \frac{\alpha+x}{\alpha+\beta+n}$$

这两个 Bayes 估计是不同的。作为数值例子,若选用均匀分布 $U(0,1)$ 作为 θ 的先验分布,那么上述两个估计分别为

$$\hat{\theta}_{\max} = \frac{x}{n}, \quad \hat{\theta}_E = \frac{x+1}{n+2}$$

其中,第一个估计 $\hat{\theta}_{\max}$ 就是经典统计中的极大似然估计,或者说,不合格品率 θ 的极大似然估计就是特定先验分布 $U(0,1)$ 下的 Bayes 估计。

2. 估计量的评价

评价一个 Bayes 估计 $\hat{\theta}$ 的好坏,最好的方法是考察 $\hat{\theta}$ 对 θ 的均方差。设参数 θ 的后验分布为 $h(\theta|x)$, θ 的 Bayes 估计为 $\hat{\theta}$, 则 $(\hat{\theta}-\theta)^2$ 的后验期望

$$\text{MSE}(\hat{\theta} | x) = E_{\theta|x}(\hat{\theta}-\theta)^2$$

称为 $\hat{\theta}$ 的后验均方差。当 $\hat{\theta}$ 为后验期望估计 $\hat{\theta}_E = E(\theta|x)$ 时,后验均方差即为后验方差,即

$$\text{MSE}(\hat{\theta} | x) = \text{var}(\theta | x)$$

其平方根 $[\text{var}(\theta|x)]^{1/2}$ 称为后验标准差。

$\hat{\theta}$ 的后验均方差有如下分解

$$\text{MSE}(\hat{\theta} | x) = \text{var}(\theta | x) + (\hat{\theta}_E - \theta)^2$$

可见, θ 的后验均值估计 $\hat{\theta}_E = E(\theta|x)$ 是使后验均方差达到最小的估计,所以实际中常取后验均

值作为 θ 的 Bayes 估计。

例 15.6 在例 15.5 中,在选用共轭先验分布时获得不合格品率 θ 的后验分布 $\beta(\alpha+x, \beta+n-x)$,其后验方差为

$$\text{var}(\theta | x) = \frac{(\alpha+x)(\beta+n-x)}{(\alpha+\beta+n)^2(\alpha+\beta+n+1)}$$

其中, n 为样本量, x 为样本中不合格品数, α, β 为超参数。若取 $\alpha=\beta=1$, 则后验方差为

$$\text{var}(\theta | x) = \frac{(x+1)(n-x+1)}{(n+2)^2(n+3)}$$

它是 θ 的后验期望估计 $\hat{\theta}_E = (x+1)/(n+2)$ 的后验均方差。而后验众数估计 $\hat{\theta}_{\max} = x/n$ 的后验均方差为

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_{\max} | x) = \frac{(x+1)(n-x+1)}{(n+2)^2(n+3)} + \left\{ \frac{x+1}{n+2} - \frac{x}{n} \right\}^2$$

值得注意的是,在评价 Bayes 估计的时候不用“无偏性”,这是因为 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}(x)$ 应满足如下等式

$$E(\hat{\theta}(x)) = \int_x \hat{\theta}(x) p(x | \theta) dx = \theta$$

其中,平均是对 x 的样本空间中的所有可能出现的样本取平均,而实际中样本空间中的绝大多数样本没有出现过,所以在评价 Bayes 估计好坏时不用无偏性。这一观点在 Bayes 学派中被称为“条件观点”。这种观点认为:基于后验分布的统计推断意味着只考虑已出现的数据(样本观测值),而未出现的数据与推断无关。基于这一观点无须寻求估计量的抽样分布及其一、二阶矩。而评价 Bayes 估计好坏也只能从后验分布中提取信息。这在实际应用中使计算简化。因为后验均方差或后验方差总比寻求抽样分布的方差要容易得多。

3. Bayes 区间估计

当获得参数 θ 的后验分布 $h(\theta|x)$ 之后,立即可获得 θ 的可信区间,具体定义如下:

对给定的样本 x 和概率 $1-\alpha$ ($0 < \alpha < 1$),若存在这样的两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x)$ 与 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x)$,使得

$$P(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U | x) \geq 1-\alpha \quad (15.11)$$

则称区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为参数 θ 的可信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayes 可信区间,或简称为 θ 的 $1-\alpha$ 可信区间。而满足

$$P(\theta \geq \hat{\theta}_L | x) \geq 1-\alpha \quad (15.12)$$

的 $\hat{\theta}_L$ 称为 θ 的 $1-\alpha$ (单侧)可信下限,满足

$$P(\theta \leq \hat{\theta}_U | x) \geq 1-\alpha \quad (15.13)$$

的 $\hat{\theta}_U$ 称为 θ 的 $1-\alpha$ (单侧) 可信上限。

这里可信区间和可信水平与经典统计的置信区间和置信水平是同类概念。Bayes 学派之所以用该名是为了区别其含义。置信区间是随机区间, 90 % 的置信区间是指在 100 次使用它时大约有 90 次所得区间能盖住未知参数, 至于 1 次使用它时没有任何解释。而 90 % 的可信区间在样本 x 给定后, 可通过后验分布的分位数求得, θ 落入可信区间的概率是 0.9。

对给定的可信水平 $1-\alpha$, 从后验分布 $h(\theta|x)$ 获得的可信区间不止一个, 常用的方法是把 α 平分, 用 $\alpha/2$ 和 $1-\alpha/2$ 的分位数来获得 θ 的可信区间, 称为等尾可信区间。等尾可信区间在实际中经常被应用, 但不是最理想的, 最理想的可信区间应是区间长度最短的, 这只要把具有最大后验密度的点都包含在区间内, 而在区间外的点上的后验密度函数值不超过区间内的后验密度函数值即可, 这样的区间称为最大后验密度 (HPD) 可信区间, 具体定义如下:

设参数 θ 的后验分布为 $h(\theta|x)$, 对于给定的可信水平 $1-\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), 如果存在区域 D 满足下面两个条件:

$$\textcircled{1} P(\theta \in D | x) = \int_D h(\theta | x) d\theta = 1 - \alpha;$$

② 任给 $\theta_1 \in D, \theta_2 \notin D$, 总有不等式

$$h(\theta_1 | x) \geq h(\theta_2 | x)$$

则称 D 是 θ 的最大后验密度区域估计。如果 D 又是一个区间, 则称为最大后验密度 (HPD) 可信区间。下面用一个正态分布的例子来说明。

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本, 未知参数是 σ^2 , 求 σ^2 的区间估计。

采用 Bayes 假设, 这时

$$h(\sigma^2 | x) \propto e^{-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / (2\sigma^2)} / \sigma^n$$

于是 σ^2 的后验分布是逆伽马分布。为方便起见, 将密度写为如下形式:

$$\gamma(\sigma^2 | a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)(\sigma^2)^{a+1}} e^{-b/\sigma^2}$$

其中, $a = \frac{n}{2} - 1, b = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / 2$ 。

注意到 $\gamma(\sigma^2 | a, b)$ 的密度是非对称的, 因此对称地截取分位点并不能得到最大后验密度区域。对于可信水平 $1-\alpha$, 该区域为由满足下列等式的 c_1 和 c_2 构成的区间 $[c_1, c_2]$:

$$\textcircled{1} P(c_1 \leq \sigma^2 \leq c_2) = \int_{c_1}^{c_2} \gamma(\sigma^2 | a, b) d\sigma^2 = 1 - \alpha;$$

$$\textcircled{2} \gamma(c_1 | a, b) = \gamma(c_2 | a, b)。$$

应注意, 这一结果与经典方法常见的置信区间并不完全相同。

15.2 可靠性的 Bayes 评估

Bayes 方法系统地用于可靠性技术,在 20 世纪 80 年代已有专门的著作。可靠性技术处理的对象一般能做的试验次数少,数据得来不易,如何利用经验知识来减少试验的次数正是工程实际中十分关心的,这推动了 Bayes 方法在可靠性技术中的应用。

可靠性试验获得的往往不是完全样本,因为试验的时间不可能无限地延续,到某个时刻必须终止;另一方面,样本的分布往往呈指数分布、威布尔分布、极值分布等。下面以二项分布、指数分布为例介绍单元产品的可靠性 Bayes 评估,最后介绍系统可靠性 Bayes 评估的基本流程。

15.2.1 二项分布的 Bayes 估计

每次试验的成功概率 θ 是一个参数, n 次独立试验中的成功次数 x 服从二项分布,恰好成功 r 次的概率是

$$R(X=r) = \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r} \quad (15.14)$$

如采用共轭先验分布 $\beta(a,b)$,则 θ 的后验分布是 $\beta(a+r, b+n-r)$ 。计算 θ 的可信区间需要下面的定理。

定理 15.1 设 $\theta \sim \beta(a,b)$, $2a, 2b$ 是自然数,则 $\frac{b}{a} \times \frac{\theta}{1-\theta} \sim F(2a, 2b)$ 。

根据上述定理,就可以利用 F 分布来回答上面的问题。假定先验分布的超参数 a, b 已知,则当 $x=r$ 时,有

$$\frac{b+n-r}{a+r} \times \frac{\theta}{1-\theta} \sim F(2(a+r), 2(b+n-r))$$

则可信水平为 $1-\alpha$ 的等尾可信区间为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}_L &= \frac{(a+r)F_{\alpha/2}(2(a+r), 2(b+n-r))}{b+n-r + (a+r)F_{\alpha/2}(2(a+r), 2(b+n-r))} \\ \hat{\theta}_U &= \frac{(a+r)F_{1-\alpha/2}(2(a+r), 2(b+n-r))}{b+n-r + (a+r)F_{1-\alpha/2}(2(a+r), 2(b+n-r))} \end{aligned} \right\} \quad (15.15)$$

相应的 $1-\alpha$ (单侧)可信下限与(单侧)可信上限分别为

$$\hat{\theta}_L = \frac{(a+r)F_{\alpha}(2(a+r), 2(b+n-r))}{b+n-r + (a+r)F_{\alpha}(2(a+r), 2(b+n-r))} \quad (15.16)$$

和

$$\hat{\theta}_U = \frac{(a+r)F_{1-\alpha}(2(a+r), 2(b+n-r))}{b+n-r + (a+r)F_{1-\alpha}(2(a+r), 2(b+n-r))} \quad (15.17)$$

例 15.7 某一成败型产品,从历史资料算得 $a=3, b=2$, 现在又进行了 10 次试验, 9 次成功, 1 次失败, 试计算成功概率(可靠度) θ 的 0.95 的可信区间。

解: 已知 $a=3, b=2, n=10, r=9$, 所以 $a+r=12, b+n-r=3$ 。查 F 分布表, 得

$$F_{0.95}(24, 6) = 3.84, \quad F_{0.05}(24, 6) = 1/2.508$$

将上式代入式(15.15), 得

$$\hat{\theta}_L = 0.6146, \quad \hat{\theta}_U = 0.9389$$

15.2.2 指数分布的 Bayes 估计

电子产品的使用寿命往往服从指数分布, 它的分布函数

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0$$

相应的可靠度 $R = e^{-\lambda t}$ 。如何从试验数据中求出 R 的置信限是可靠性统计的典型问题。注意到寿命试验往往难以观测到全体试验样品的失效数据, 如果能得到定数截尾的前 r 个失效时刻 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r, t_1, t_2, \dots, t_r$ 就是样本的前 r 个顺序统计量, 则似然函数

$$L(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{n!}{(n-r)!} e^{-T\lambda} \cdot \lambda^r \quad (15.18)$$

其中, $T = \sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r$ 。

使用不同的先验分布, 可以得到不同的后验分布。根据 Jeffreys 原则, 可以求出 Fisher 信息量

$$I(\lambda) = \frac{r}{\lambda^2}$$

于是若先验分布 $\pi(\lambda) \propto \lambda^{-1}$, 则后验分布为

$$h(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_r) \propto \lambda^{r-1} e^{-\lambda T} \quad (15.19)$$

若采用共轭先验分布, 则相应的先验分布是 $\Gamma(a, b)$, 即

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}$$

此时, 后验分布

$$h(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_r) \propto \lambda^{a+r-1} e^{-\lambda(T+b)} \quad (15.20)$$

显然, 式(15.19)是式(15.20)的特例, 相应于 $a=b=0$ 。

从式(15.20)出发, λ 的 Bayes 估计

$$\hat{\lambda} = E(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_r) = \frac{a+r}{b+T} \quad (15.21)$$

注意到在 t 时刻的可靠度 $R = \exp(-\lambda t)$, 即 $\ln R = -\lambda t$, 它是 λ 的线性函数, 很容易求得 R 的后验分布

$$P(R < x | t_1, t_2, \dots, t_r) = P\left(\lambda > -\frac{\ln x}{t} \middle| t_1, t_2, \dots, t_r\right) = \int_{-\frac{\ln x}{t}}^{\infty} \frac{(T+b)^{a+r}}{\Gamma(a+r)} \lambda^{a+r-1} e^{-\lambda(T+b)} d\lambda \quad (15.22)$$

利用这个公式,就可以求出可靠度 R 的置信限。如果要求 R 的 Bayes 估计,则直接从式(15.20)求 R 的后验期望即可得到

$$\hat{R} = E(R | t_1, t_2, \dots, t_r) = \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{a+r} \quad (15.23)$$

其中, $\tau = (T+b)/t$ 。

τ 的实际意义非常明显,分子 $T+b$ 表示样本能完成任务的时间 T 和先验信息中能完成任务的时间 b 的总和,分母 t 是任务规定完成的时间, \hat{R} 的值在 $0 \sim 1$ 之间,因为 $\tau > 0$, 所以 $\tau < 1 + \tau$ 。如果 τ 很小,即实际完成的与任务要求的相差太远,则可靠度 \hat{R} 就趋向于零;如果 τ 很大,即实际完成的大大超过任务规定的,那么可靠度 \hat{R} 就趋向于 1。

除上面的两种情形外,对于双参数的指数分布,同样可引入共轭先验分布,但情况复杂得多,后验分布的计算也相当麻烦。对于威布尔分布,如果对形状参数有办法估计,就可以化成指数分布来处理,极值分布也有类似的性质,这里就不逐一介绍了。

15.2.3 系统可靠性 Bayes 评估的基本流程

Bayes 评估方法不仅可以用于单元产品的可靠性评估,而且可以应用到系统可靠性评估中,并且发展和形成了大量系统可靠性 Bayes 评估的方法。不过,这些方法大多使用像 Mellin 变换、Chebyshev 多项式等复杂的数学工具,致使工程人员难以掌握,因此在工程上实际使用较少。当然,系统可靠性 Bayes 评估作为系统可靠性评估的重要组成部分,在理论和实际上确有研究和发展的必要。因此,这里扼要介绍系统可靠性 Bayes 评估的基本流程,根据这一基本流程,使用 Bayes 理论和方法,可以确定系统可靠性的后验分布,进而进行系统可靠性评估。系统可靠性 Bayes 评估的具体步骤如下:

- ① 根据设备的寿命分布类型及工程信息选定设备寿命分布参数的先验分布;
- ② 利用设备试验数据及先验分布计算设备寿命分布参数的后验分布;
- ③ 利用设备寿命分布参数的后验分布计算设备可靠度的后验分布;
- ④ 利用设备可靠度后验分布计算系统可靠度先验矩;
- ⑤ 利用系统可靠度先验矩计算系统可靠度先验分布;
- ⑥ 利用系统可靠度先验分布及系统级试验数据计算系统可靠度后验分布;
- ⑦ 根据系统可靠度后验分布进行系统可靠性指标的评估。

其中,步骤④和步骤⑤是关键步骤。实现这两个步骤的典型方法有:二阶矩方法、CF 展开方法(见第 19.1.2 小节)、Chebyshev 多项式逼近方法、仿真方法等。

习 题

15.1 设 θ 是一批产品的不合格率, 已知它不是 0.1 就是 0.2, 且其先验分布为

$$\pi(0.1) = 0.7, \quad \pi(0.2) = 0.3$$

假如从这批产品中随机抽取出 8 个进行检查, 发现有 2 个不合格品, 求 θ 的后验分布。

15.2 设 θ 是一批产品的不合格率。从该批产品中抽取 8 个产品进行检验, 发现 3 个不合格品, 假如先验分布为

① $\theta \sim U(0, 1)$

② $\theta \sim \pi(\theta) = \begin{cases} 2(1-\theta), & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

分别求 θ 的后验分布。

15.3 试证: 泊松分布的均值 λ 的共轭先验分布是伽马分布。

15.4 设参数 θ 的先验分布为贝塔分布 $\beta(\alpha, \beta)$, 若从先验信息获得其均值与方差分别为 $1/3$ 和 $1/45$, 请确定该先验分布。

15.5 设随机变量 X 服从几何分布

$$P(X = x) = \theta(1 - \theta)^x, \quad x = 0, 1, \dots$$

其中参数 θ 的先验分布为均匀分布 $U(0, 1)$ 。

① 若对 X 作一次观测, 观测值为 3, 求 θ 的后验期望估计。

② 若对 X 作三次观测, 观测值为 3, 2, 5, 求 θ 的后验期望估计。

15.6 设不合格品率 θ 的先验分布为贝塔分布 $\beta(5, 10)$, 在下列顺序抽样信息下逐次寻求 θ 的最大后验估计和后验期望估计。

① 先随机抽检 20 个产品, 发现 3 个不合格品。

② 再随机抽检 20 个产品, 没有发现 1 个不合格品。

15.7 对正态分布 $N(\theta, 1)$ 作观测, 获得 3 个观测值: 2, 4, 3, 若 θ 的先验分布为 $N(3, 1)$, 求 σ^2 的 0.95 可信区间。

15.8 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的一个样本, 若 σ^2 的先验分布为逆伽马分布 $IG(\alpha, \lambda)$, 求 σ^2 的 0.9 可信上限。

15.9 请读者思考 Bayes 统计学和经典统计学有什么异同点。

第 3 篇 系统可靠性评估

第 16 章 系统可靠性模型

系统可靠性模型是进行系统可靠性分析的基础,因此本章介绍常用的系统可靠性模型,主要是不可修系统的系统可靠性模型。至于可修系统的系统可靠性模型,比较复杂,这里不作介绍,读者可参阅参考文献[10]。

16.1 串联系统

所谓串联系统是指系统由 m 个单元(又叫部件)组成,当且仅当所有单元都正常时系统才正常,其可靠性框图如图 16.1 所示。



图 16.1 串联系统可靠性框图

设第 i 个单元的寿命为 T_i ,可靠度 $R_i(t) = P(T_i > t) (i=1, 2, \dots, m)$ 。假定各单元是否发生失效相互独立,即 T_1, T_2, \dots, T_m 相互独立。设在初始时刻 $t=0$,所有单元都是新的并且同时开始工作,则上述串联系统的寿命 $T = \min\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$,而系统的可靠度

$$R(t) = P(T > t) = \prod_{i=1}^m R_i(t) \quad (16.1)$$

是独立单元串联系统的可靠性结构方程。

记第 i 个单元的失效率为 $\lambda_i(t)$,则系统失效率为

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \quad (16.2)$$

而系统的可靠度为

$$R(t) = e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) du} \quad (16.3)$$

相应的系统平均寿命(MTTF)为

$$ET = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_0^t \lambda(u) du} dt \quad (16.4)$$

当单元寿命服从指数分布时, $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 系统的可靠度和平均寿命分别为

$$R(t) = e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i t}, \quad \text{MTTF} = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right)^{-1} \quad (16.5)$$

16.2 并联系统

所谓并联系统是指系统由 m 个单元(或部件)组成, 当且仅当所有单元都失效时系统才失效, 其可靠性框图如图 16.2 所示。

设第 i 个单元的寿命为 T_i , 可靠度 $R_i(t) = P(T_i > t)$ ($i=1, 2, \dots, m$)。假定各单元失效相互独立。如果在初始时刻 $t=0$, 所有单元都是新的并同时开始工作, 则并联系统的寿命

$$T = \max\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$$

而系统的可靠度

$$R(t) = P\{T > t\} = 1 - \prod_{i=1}^m [1 - R_i(t)] \quad (16.6)$$

如果单元寿命服从指数分布, $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 则系统的可靠度和平均寿命分别为

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad (16.7)$$

和

$$E(T) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \frac{1}{\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}} \quad (16.8)$$

16.3 表决系统

表决系统指系统由 m 个部件(单元)组成, 当且仅当 m 个部件中至少有 k ($1 \leq k \leq m$) 个部件正常工作时系统才正常, 其可靠性框图如图 16.3 所示。这种系统简记为 $k/m(G)$ 表决系统。当 $k=1$ 时, 是并联系统; 当 $k=m$ 时, 是串联系统。

如果 m 个部件的寿命分别为 T_1, T_2, \dots, T_m , 并且独立同分布, 记部件的可靠度 $R_i(t) = R_1(t) = P(T_1 > t)$, 则系统的可靠度为

$$R(t) = \sum_{j=k}^m \binom{m}{j} [R_1(t)]^j [1 - R_1(t)]^{m-j} \quad (16.9)$$

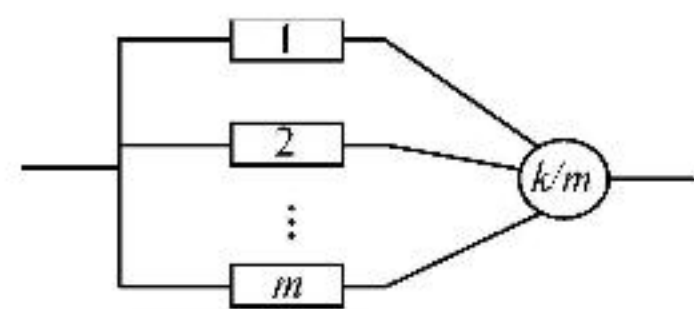


图 16.3 $k/m(G)$ 系统可靠性模型

若所有 T_i 服从失效率为 λ 的同一指数分布, 则

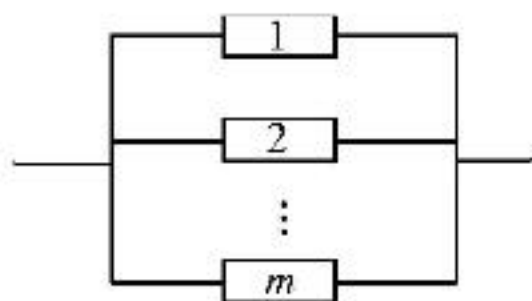


图 16.2 并联系统可靠性框图

$$R(t) = \sum_{j=k}^m \binom{m}{j} e^{-j\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{m-j} \quad (16.10)$$

相应的系统平均寿命

$$E(T) = \lambda^{-1} \sum_{j=k}^m \frac{1}{j} \quad (16.11)$$

16.4 储备系统

为了提高系统的可靠性,除了多安排一些部件实施冗余技术(例如考虑并联)外,还可储备一些备件,以便当工作部件失效时,可立即由储备部件来顶替,保证系统正常工作。这种系统称为储备系统。储备系统又分为冷储备系统和温储备系统两种。前者指储备部件在储备期间性能保持不变,因而储备期的长短对部件在以后使用时的使用寿命没有影响;而后者储备部件在储备期间性能要变坏,因而储备期的长短对部件在以后使用时的使用寿命有影响。此外,当工作部件失效时,储备部件应当立即转为工作状态,这需要转接工作,这种转接工作一般采用开关转接,于是又分为开关完全可靠与开关不完全可靠等不同情形。这里仅以转接开关完全可靠的冷储备系统为例加以介绍。

设系统由 m 个部件组成。在初始时刻,一个部件开始工作,其余 $m-1$ 个部件作冷储备。当工作失效时,储备部件逐个地去替换,直到所有部件都失效时,系统才失效。

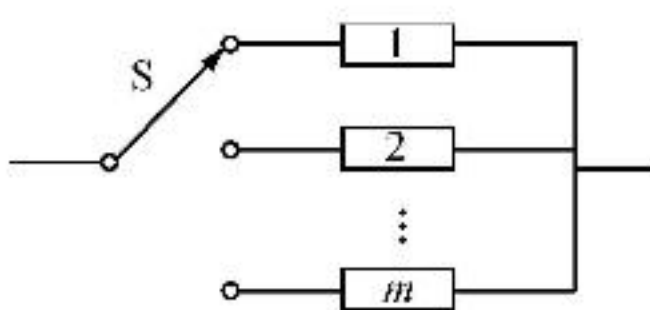


图 16.4 冷储备系统

冷储备系统如图 16.4 所示。这里,假定储备部件替换失效部件时,转换开关 S 是完全可靠的,而且转换是瞬时完成的。

假设这 m 个部件的使用寿命分别为 T_1, T_2, \dots, T_m , 且它们相互独立。易知,冷储备系统的使用寿命

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_m \quad (16.12)$$

因此,系统寿命分布为

$$F(t) = P\{T_1 + T_2 + \dots + T_m \leq t\} = F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_m(t) \quad (16.13)$$

其中, $F_i(t)$ 是第 i 个部件的使用寿命分布,“ $*$ ”表示卷积,即

$$A(t) * B(t) = \int_0^t B(t-u) dA(u)$$

因而,系统的可靠度和平均寿命分别为

$$R(t) = 1 - F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_m(t) \quad (16.14)$$

和

$$MTTF = E\{T_1 + T_2 + \dots + T_m\} = \sum_{i=1}^m ET_i \quad (16.15)$$

其中, ET_i 表示第 i 个部件的平均寿命。

当部件寿命服从同一失效率的指数分布时,即 $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 系统的寿命是 m 个独立同分布的随机变量之和, 则系统的平均寿命和可靠度为

$$\left. \begin{aligned} \text{MTTF} &= m/\lambda \\ R(t) &= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned} \right\} \quad (16.16)$$

当 $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 且 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 两两不等时, 通过拉普拉斯变换可得系统可靠度和平均寿命为

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= \sum_{i=1}^m \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_i} \right] e^{-\lambda_i t} \\ \text{MTTF} &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda_i} \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

特别当系统由两个部件组成时, 有

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \\ \text{MTTF} &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \end{aligned} \right\} \quad (16.18)$$

在实际的工程系统中, 为了提高可靠性, 往往采用串联、冗余、储备的混合结构形式, 如不考虑储备, 则这种具有串联和冗余混合结构的系统称为混联系统。

16.5 单调系统

设系统由 m 个部件组成, x_i 表示第 i ($i = 1, 2, \dots, m$) 个部件的状态, 即

$$x_i = \begin{cases} 1 & (\text{部件 } i \text{ 正常}) \\ 0 & (\text{部件 } i \text{ 失效}) \end{cases}$$

用 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 记录组成系统的各部件的状态。

定义 16.1 令

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2, \dots, m\}$$

系统只有正常和失效两个状态。设 \mathcal{S} 上的函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\text{若各部件处于状态 } \mathbf{x} \text{ 时系统正常}) \\ 0 & (\text{若各部件处于状态 } \mathbf{x} \text{ 时系统失效}) \end{cases}$$

则 φ 叫做系统的结构函数。若对于任意 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \leq \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 有 $\varphi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{y})$, 则称系统是单调系统, 这里 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ 指 $x_i \leq y_i$, 对一切 i 都成立, 而 $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ 则表示 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, 并且至少有一个 j 使得 $x_j < y_j$ 。

例如, m 个部件的串联系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \min(x_1, x_2, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m x_i$$

m 个部件的并联系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - x_i)$$

$k/m(G)$ 表示系统的结构函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^m x_i \geq k \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

显然, 它们都是单调系统。

单调系统在工程实际中是最常见的。如果知道各部件的可靠度, 计算系统的可靠度时, 需要对系统具体分析, 写出系统的结构函数, 运用概率论知识进行计算。下面介绍认识、分析结构函数的一些定义和工具。

如果 $\varphi(\mathbf{x})=1$, 则称状态向量 \mathbf{x} 是系统的路向量。

定义 16.2 若 $\varphi(\mathbf{x})=1$, 且对于一切 $\mathbf{y} < \mathbf{x}$, 有 $\varphi(\mathbf{y})=0$, 则称 \mathbf{x} 是最小路向量 (简称最小路)。

若 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是一最小路, 则集合 $C_1(\mathbf{x})=\{i: x_i=1\}$ 称为最小路集, 其元素个数叫做最小路的阶或长度。

如果 $\varphi(\mathbf{x})=0$, 则称状态向量 \mathbf{x} 是系统的割向量。

定义 16.3 若 $\varphi(\mathbf{x})=0$, 且对于一切 \mathbf{y} , 只要 $\mathbf{y} < \mathbf{x}$, 有 $\varphi(\mathbf{y})=1$, 则称 \mathbf{x} 是最小割向量 (简称最小割)。

若 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是一最小割, 则集合 $C_0(\mathbf{x})=\{i: x_i=0\}$ 称为最小割集, 其元素个数叫做最小割的阶或长度, 记为 g 。

例如, m 个部件的串联系统只有一个路向量 $\mathbf{x}=(1, 1, \dots, 1)$, 所以只有一个最小路集 $\{1, 2, \dots, m\}$, 而最小割集则有 m 个: $\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}$; m 个部件的并联系统有 m 个最小路集: $\{1\}, \{2\}, \dots, \{m\}$, 只有一个最小割集 $\{1, 2, \dots, m\}$ 。

下面通过一个具体例子来说明如何寻找最小路集或最小割集。

例 16.1 设由 5 个部件组成系统, 具体结构如图 16.5 所示, 求系统的最小路集和最小割集。

解: 分析可知, 该系统的结构函数为

$$\varphi(x_1, \dots, x_5) = [1 - (1 - x_1)(1 - x_2)] \times [1 - (x_3 x_4)(1 - x_5)]$$

该系统有四个最小路集 $\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ 和三个最小割集 $\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ 。

下面介绍怎样利用系统的最小路集和最小割集来求系统可靠度。设 $\varphi(\mathbf{x})$ 是系统的结构函数, 部件 i 的可靠度 $R_i = P\{x_i=1\}$, 有 $\mathbf{R}=(R_1, R_2, \dots, R_m)$, 则系统的可靠度

$$\mathbf{R} = P\{\varphi(\mathbf{x}) = 1\} \stackrel{\text{def}}{=} H(\mathbf{R}) \quad (16.19)$$

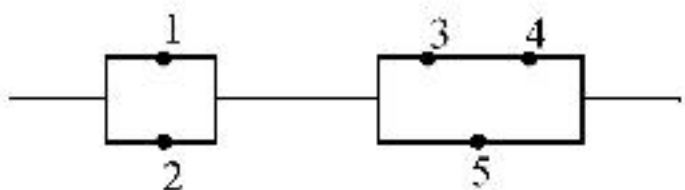


图 16.5 系统结构图

设系统的所有最小路集是 $B_1, B_2, \dots, B_s, E_i = \{B_i \text{ 中所有部件正常}\} (i=1, 2, \dots, s)$, 于是

$$H(\mathbf{R}) = P\left\{\bigcup_{i=1}^s E_i\right\} = \sum_{k=1}^s (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq s} P\{E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}\} \quad (16.20)$$

也可利用最小割集进行计算。设系统的所有最小割集是 $C_1, C_2, \dots, C_g, F_i = \{C_i \text{ 中所有部件失效}\}, i=1, 2, \dots, g$, 于是

$$1 - H(\mathbf{R}) = P\left\{\bigcup_{i=1}^g F_i\right\} = \sum_{k=1}^g (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq g} P\{F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}\} \quad (16.21)$$

由此可求出 $H(\mathbf{R})$ 。

16.6 网络系统

网络系统(简称网络)是由一些节点 V_1, V_2, \dots, V_r 及连接节点间的弧(也称边) e_1, e_2, \dots, e_l 共同组成的, 这里每个 e_k 有一对节点 V_i, V_j 与其连接。节点和弧(通称网络的单元)均有正常和失效两种可能的状态。假设各单元失效与否是相互独立的, 令 $m = r + l$ 。若存在节点 $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_s}$ 使得分别有弧连接 V_i 与 V_{i_1}, V_{i_1} 与 V_{i_2}, \dots, V_{i_s} 与 V_k , 则称节点 V_i 与 V_k 是连通的。若这些弧和这些节点 $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_s}$ 都处于正常状态, 则称 V_i 与 V_k 是有效连通的。

用 $R_i(t)$ 表示第 i 个单元在时刻 t 的可靠度(正常的概率), $i=1, 2, \dots, m$, 其中 $R_1(t), R_2(t), \dots, R_r(t)$ 是 r 个节点的可靠度; $R_{r+1}(t), \dots, R_m(t)$ 是 l 条弧的可靠度。

网络系统要研究的基本问题是: 设 K 是由指定的 k 个节点组成的集合 ($2 \leq k \leq r$), 求出概率

$$P_K(t) = P\{\text{在时刻 } t, K \text{ 中所有节点彼此有效连通}\}$$

这就是所谓的 K 终端问题。当 K 只有两个节点时, 就是最基本的两终端问题; 若 K 包含网络的所有节点, 则是全终端问题。针对这些问题, 虽然已有部分结果, 但离问题的解决还相差很远。

习 题

16.1 某机载电子系统是包括一部雷达、一台计算机和一个辅助设备的串联系统。设其寿命

服从指数分布,各组成部分的 MTBF 分别为 83 h、167 h 和 500 h,求该系统的 MTBF 及工作 5 h 的可靠度。

16.2 假设某产品由 2×10^4 个电子元器件串联组成,其寿命服从指数分布,如果要求其连续不间断工作 3 天的可靠度为 0.8,试求元器件的平均故障率。

16.3 某喷气式飞机有三台发动机,至少需要两台发动机正常才能安全起落和飞行。假定飞机故障仅由发动机引起,且发动机的寿命服从指数分布,MTBF 为 2×10^3 h,求飞机连续飞行 5 h 和 10 h 的可靠度。

16.4 某直流电源系统由直流发电机、应急储备电池和故障监测及转换装置组成,发电机的工作故障率为 $2 \times 10^{-4} \text{ h}^{-1}$,储备电池的工作故障率为 $1 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$,故障监测及转换装置的可靠度为 0.99,试求该系统工作 10 h 的可靠度。

16.5 由 n 个相同单元组成的并联系统,单元的累积故障分布函数 $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$,试求该系统的故障率函数。

第 17 章 可靠性增长数据的分析

新产品的研制通常要经历模样、初样、试样、定型及批量生产等多个阶段。从模样阶段开始,各阶段都要进行各种试验,以便发现设计、工艺、材料等方面的问题,暴露薄弱环节;试验以后,分析失效模式,找出故障原因,提出改进措施,进行改进;然后再通过试验加以验证。这样的过程反复进行,从而使产品的可靠性不断增长,直到产品可靠性满足要求(即达到任务规定指标),这就是可靠性增长过程。简单地说,这是一个“试验—改进—再试验—再改进”的过程。在这一过程中,必须采用统计方法,对所采取的工程改进措施进行检测和分析,使人们得知产品某一时刻达到的可靠性水平。这既可以避免对产品盲目改动而造成人力、物力的浪费,又可以防止在研制结束时才发现可靠性未达到规定要求而必须大返工造成的资金浪费,贻误时机。

可靠性增长过程的统计特点:

① 总体不断变化。由于反映产品质量水平的总体随不断改进而变化,因此,不能采用总体不变的常用统计方法对产品进行分析。

② 样本量小。在产品的研制阶段,每次投入试验的样品都不会很多,而且试验次数也较少,特别是对于贵重产品或试验代价高的复杂系统。

③ 国内外的研究表明,可靠性增长有其特有的规律,用于描述可靠性增长的数学模型称为可靠性增长模型。根据所进行的试验和获得的数据,建立或选择适当的可靠性增长模型才能对产品可靠性进行正确的跟踪和预测,并为工程管理提供正确信息。

17.1 可靠性增长的趋势检验

在使用可靠性增长技术之前,必须根据试验得到的数据进行趋势检验,以检验产品的可靠性在试验中是否存在变化,确定改进措施是否正确有效。趋势检验还可用于判断产品在使用中是处于早期失效阶段、随机失效阶段,还是损耗阶段。

下面介绍趋势检验的两种常用方法:图示法和分析法。对分析法,只介绍 Laplace 检验。

17.1.1 趋势检验的图示法

对一个进行试验的系统,记得到的 n 个累计失效时间为 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,在一般坐标纸上,以失效时间 t_i 为横坐标,以累计失效数 i 为纵坐标,描出 n 个点: $(t_i, i) (i=1, 2, \cdots, n)$,然后连成一条光滑曲线。对此曲线可作如下分析:

① 如果曲线向上凸,此时相邻的失效时间间隔逐渐增大,则表明产品的可靠性增长,如图 17.1(a)所示。

② 如果曲线向下凹,此时相邻的失效时间间隔逐渐减小,则表明产品的可靠性下降,如图 17.1(b)所示。

③ 如果曲线近似成一条直线,则此时产品的可靠性无变化,如图 17.1(c)所示。失效的时间间隔可用指数分布描述,或者说,其失效服从泊松过程。只要注意到系统的失效强度 $\lambda(t) = dN(t)/dt$,上述结论就容易理解了。

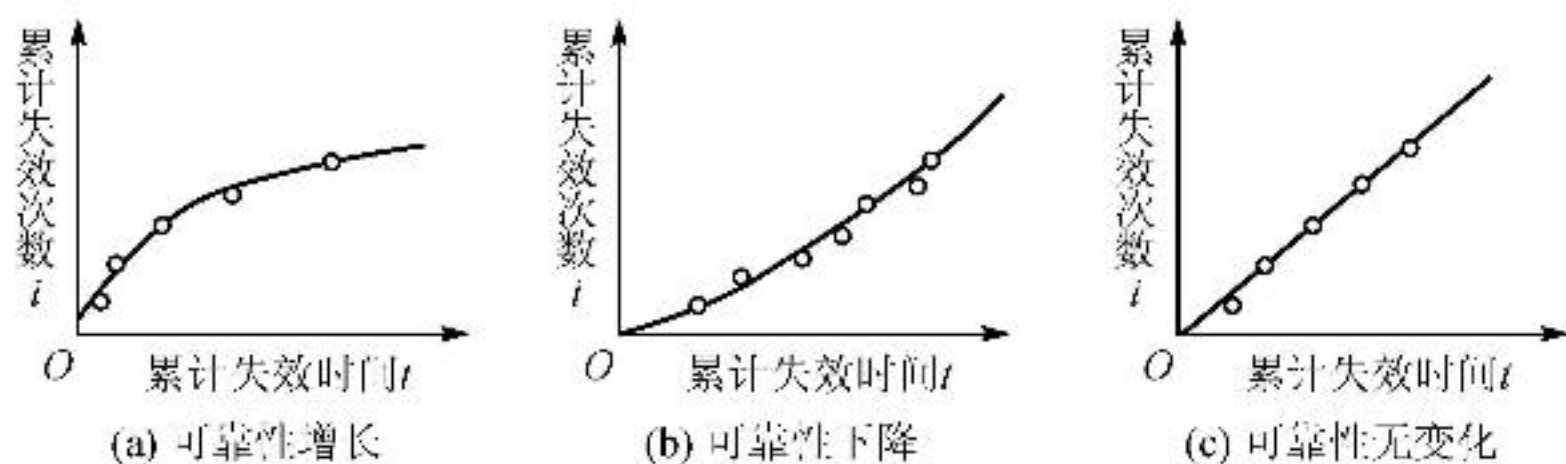


图 17.1 趋势检验的图示

图示法的优点是简单、直观、使用方便,但在失效次数较少时,可能导致错误或模棱两可的结论。但采用 Laplace 检验,可以克服图示法的缺点。

17.1.2 趋势检验的 Laplace 法

对单台系统进行试验,定时截尾试验是指试验进行到预定的累积试验时间 T 时终止试验,记得到的 n 个累积失效时间为

$$0 \triangleq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T \quad (17.1)$$

而定数截尾试验是指试验进行到预定的失效次数 n 发生时终止试验,即试验终止时刻为 $T = t_n$ 。

若对 k 台系统进行试验,定时截尾试验是指试验进行到预定的累积试验时间 T 时 k 台系统同时终止试验,得到的 n 个累积失效时间为

$$0 < t_{i1} < t_{i2} < \cdots < t_{in_i} \leq T, \quad i = 1, 2, \cdots, k \quad (17.2)$$

其中, n_i 指第 i 台系统在 $(0, T)$ 内的失效次数, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ 。而对 k 台系统,定数截尾试验是指试验进行到预定的总失效次数 n 发生时, k 台系统同时终止试验。

对于单台或多台系统的定时截尾试验或定数截尾试验, Laplace 检验按如下步骤进行:

① 建立假设。原假设 H_0 : 单台系统(或多台系统)的失效过程服从泊松过程,即“相邻的失效时间间隔 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n-1$) 服从指数分布,产品的可靠性没有趋势”。对多台系统,把所有的失效时间 t_{ij} 从小到大排序,并依次改记为 $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, 这时失效时间间隔 $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ($i = 1, 2, \cdots, n-1$)。以下记 M 为相邻失效时间间隔的个数,则

$$M = \begin{cases} n-1 & (\text{定数截尾}) \\ n & (\text{定时截尾}) \end{cases} \quad (17.3)$$

接受原假设 H_0 表示相邻失效时间间隔 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) 服从指数分布, 产品的可靠性没有变化趋势。当拒绝原假设 H_0 时, 则假设有两种可能的选择。

H_{11} : “相邻失效时间间隔 Δ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) 随机地变长”, 这意味着产品可靠性在增长。

H_{12} : “相邻失效时间间隔 Δ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) 随机地变短”, 这意味着产品可靠性在下降。

② 选取检验统计量 μ 。

在定数截尾试验情形下:

$$\mu = \begin{cases} t_1/t_2 - 0.5, & M=1 \\ (t_1 + t_2)/t_3 - 1, & M=2 \\ \left[\sum_{i=1}^M t_i / (M t_n) - 0.5 \right] \sqrt{12M}, & M \geq 3, \text{单台系统} \\ \left[\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} - t_n \right) / (M t_n) - 0.5 \right] \sqrt{12M}, & M \geq 3, \text{多台系统} \end{cases} \quad (17.4)$$

在定时截尾试验情形下:

$$\mu = \begin{cases} t_1/T - 0.5, & M=1 \\ (t_1 + t_2)/T - 1, & M=2 \\ \left[\sum_{i=1}^M t_i / (MT) - 0.5 \right] \sqrt{12M}, & M \geq 3, \text{单台系统} \\ \left[\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} t_{ij} - t_n \right) / (MT) - 0.5 \right] \sqrt{12M}, & M \geq 3, \text{多台系统} \end{cases} \quad (17.5)$$

其中, T 为定时截尾时间。

③ 根据试验结果计算 μ 的实现值。

④ 根据规定的检验显著性水平 α , 确定拒绝域。无论是定时截尾, 还是定数截尾, 只要 α 和 M 相同, 则其拒绝域是相同的, 具体如下:

在 H_0 对 H_{11} 的检验问题中, 拒绝域为 $W_1 = \{\mu < \mu_{\alpha}\}$;

在 H_0 对 H_{12} 的检验问题中, 拒绝域为 $W_2 = \{\mu > \mu_{1-\alpha}\}$;

而在 H_0 对 $H_1 = H_{11} \cup H_{12}$ 的检验问题中, (等尾) 拒绝域为

$$W = \{\mu > \mu_{1-\alpha/2}\} \cup \{\mu < \mu_{\alpha/2}\}$$

其中, $\mu_{1-\alpha/2} = -\mu_{\alpha/2}$, 其值依赖于 M , 具体可从表 17.1 中查得。

⑤ 将 μ 的实现值与 $\mu_{1-\alpha/2}$, $\mu_{\alpha/2}$ 比较, 作出判断。

当 $\mu_{\alpha/2} < \mu < \mu_{1-\alpha/2}$ 时, 不拒绝 H_0 , 此时 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ 没有明显的趋势, 即以显著性水平 α 表明: 产品可靠性没有显著增长或下降趋势。

表 17.1 趋势检验统计量 μ 的临界值 $\mu_{\alpha/2}$ 表

α	$M=1$	$M=2$	$M=3$	$M=4$	$M=5$	$M \geq 6$
0.002	-0.499	-0.955	-2.367	-2.782	-2.859	-3.090
0.010	-0.495	-0.900	-2.379	-2.445	-2.474	-2.576
0.020	-0.490	-0.859	-2.217	-2.252	-2.266	-2.326
0.050	-0.475	-0.776	-1.937	-1.940	-1.943	-1.960
0.100	-0.450	-0.684	-1.661	-1.651	-1.650	-1.645
0.200	-0.400	-0.553	-1.313	-1.305	-1.300	-1.282
0.300	-0.350	-0.452	-1.069	-1.064	-1.058	-1.036
0.400	-0.300	-0.368	-0.874	-0.868	-0.862	-0.842
0.500	-0.250	-0.293	-0.706	-0.698	-0.692	-0.674

当 $\mu < \mu_{\alpha}$ 时,拒绝 H_0 ,不拒绝 H_{11} ,此时 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ 随机地增长,即以显著性水平 α 表明:产品可靠性有显著增长趋势。

当 $\mu > \mu_{1-\alpha}$ 时,拒绝 H_0 ,不拒绝 H_{12} ,此时 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$ 随机地缩短,即以显著性水平 α 表明:产品可靠性有显著下降趋势。

例 17.1 对某电子产品进行调试试验,做单台定数截尾试验,期间共失效 $n=7$ 次,失效时间(单位:h)依次为 0.15,26.34,34.84,43.58,45.82,123。检验产品是否具有可靠性增长趋势。

解: $M=7-1=6$,由式(17.4)计算趋势检验统计量:

$$\mu = \left[\sum_{i=1}^M t_i / (M t_n) - 0.5 \right] \sqrt{12M} \mid_{M=6} = -1.574$$

取 $\alpha=0.20$,查表 17.1,得 $\mu_{\alpha/2}=-1.282$,所以由 $\mu < \mu_{\alpha/2}$ 可知,产品具有显著的(显著性水平为 $\alpha/2=0.10$)可靠性增长趋势。

17.2 可靠性增长的 Duane 模型

Duane 模型(Duane,1964)是最常用的时间函数可靠性增长模型,由 Duane(1962)发现,是在许多设备的累积失效率与累积工作时间在双对数坐标纸上呈线性关系的经验规律基础上发展起来的。时间函数模型的优点是可以动态地评定产品的可靠性,并能进行可靠性预测。

Duane 模型于 1978 年首次被美国军用标准 MIL—STD—1635(EC)采纳,1987 年又被美国军用手册 MIL—HDBK—781 引用。

17.2.1 Duane 模型的数学描述

记可修系统的累积工作时间为 t , $N(t)$ 为时间 $(0, t]$ 内系统的累积失效次数。定义系统的

累积失效率为 $(0, t]$ 内系统的平均失效次数 $E[N(t)]$ 与 t 之比,即

$$C(t) = E[N(t)]/t \tag{17.6}$$

Duane 模型可用下式表示,即

$$\ln C(t) = \ln a - m \ln t \tag{17.7}$$

其中, $a > 0$ 和 $0 < m < 1$ 为未知参数。时刻 t 的瞬时失效率 $\lambda(t)$ 为

$$\lambda(t) = \frac{d\{E[N(t)]\}}{dt} \tag{17.8}$$

由式(17.6)和式(17.7)可知: $C(t) = at^{-m}$, $E[N(t)] = at^{1-m}$, 所以 $\lambda(t) = (1-m)C(t)$ 。由于 MTBF 是产品可靠性的常用指标之一,下面定义系统的累积 MTBF 为累积失效率的倒数,即

$$\overline{M}(t) = \frac{1}{C(t)} = \frac{t}{E[N(t)]} \tag{17.9}$$

定义系统的瞬时 MTBF 为瞬时失效率的倒数,即

$$M(t) = \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{1}{(1-m)C(t)} = \frac{1}{(1-m)}\overline{M}(t) \tag{17.10}$$

所以

$$\ln \overline{M}(t) = m \ln t - \ln a \quad \text{或} \quad \ln \frac{t}{E[N(t)]} = m \ln t - \ln a \tag{17.11}$$

17.2.2 Duane 模型参数的图估计

由式(17.11)可知:在 Duane 模型下, $\ln t$ 和 $\ln \frac{t}{E[N(t)]}$ 呈线性关系,但 $E[N(t)]$ 是未知的,所以用 $N(t)$ 代替 $E[N(t)]$,即将各点 $(t_i, t_i/N(t_i)) (i=1, 2, \cdots, n)$ 画在双对数坐标纸上,目测拟合一条直线(若无法拟合直线,则说明 Duane 模型不满足),Duane 模型中的参数 a 可用该直线在 $t=1$ 时的纵坐标值的倒数求出,而 m 是该直线的斜率。

由式(17.10)可知, $\ln \overline{M}(t) = \ln M(t) + \ln(1-m)$, 所以 $\ln M(t)$ 是与 $\ln \overline{M}(t)$ 平行的直线。

17.2.3 Duane 模型参数的最小二乘估计

为了给出 Duane 模型参数 a 和 b 的最小二乘估计,记录试验进行到 t_i 时,共有 N_i 次失效,试验数据如表 17.2 所列。

表 17.2 Duane 模型数据记录表

N_i	N_1	N_2	\cdots	N_n
t_i	t_1	t_2	\cdots	t_n

这些数据有两个特点:①并不要求 N_i 是相继的自然数;②既可以是定时截尾数据,又可以是定数截尾数据。

为方便起见,将 Duane 模型表示成离散形式: $N_i \approx at_i^b$ ($i=1,2,\dots,n$), 其中 $b=1-m$ 。由 $\ln N_i = \ln a + b \ln t_i + \varepsilon_i$ ($i=1,2,\dots,n$), 可得到参数 a 和 b 的最小二乘估计:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= e^{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln N_i - \hat{b} \sum_{i=1}^n \ln t_i \right)} \\ \hat{b} &= \frac{n \sum_{i=1}^n \ln N_i \ln t_i - \left(\sum_{i=1}^n \ln N_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)}{n \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (17.12)$$

有了 a 和 b 的估计,就可以得到瞬时失效率的估计: $\hat{\lambda}(t) = \hat{a} \hat{b} t^{\hat{b}-1}$ 。

若产品在时刻 T 定型后不再作改进,则认为定型后产品的寿命服从指数分布,其 MTBF 的估计为

$$\hat{M}(t) = T^{1-\hat{b}} / (\hat{a} \hat{b}), \quad t \geq T \quad (17.13)$$

17.2.4 模型的拟合优度检验

为了对 Duane 模型进行拟合优度检验,可使用 $\ln N(t)$ 与 $\ln t$ 间的经验相关系数 $\hat{\rho}$, 即

$$\hat{\rho} = l_{xy} / \sqrt{l_{xx} l_{yy}} \quad (17.14)$$

其中

$$\begin{aligned} l_{xy} &= \sum_{i=1}^n \ln N_i \ln t_i - \left(\sum_{i=1}^n \ln N_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right) / n \\ l_{xx} &= \sum_{i=1}^n (\ln t_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln t_i \right)^2 / n \\ l_{yy} &= \sum_{i=1}^n (\ln N_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n \ln N_i \right)^2 / n \end{aligned}$$

在附表 B.14 中,给出了与样本量 n 、显著性水平 α 相应的理论相关系数 $\rho=0$ 和经验相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $\hat{\rho}_\alpha$ 。若 $|\hat{\rho}| \geq \hat{\rho}_\alpha$, 则不能拒绝试验信息符合 Duane 模型的假设;反之,若 $|\hat{\rho}| < \hat{\rho}_\alpha$, 则认为试验信息与 Duane 模型不符。通常显著性水平 α 取 0.10。

对 Duane 模型的拟合优度检验,还可使用 Duane 图。若试验数据与拟合直线相当接近,则认为拟合较好。采用 Duane 图方法与采用纯统计方法相比,有它的优点:当所采用的某种纯统计的检验方法拒绝有关模型时,不会指出拒绝的理由。而用同一组数据的 Duane 图却可显示出某些理由,如增长数据出现跳跃或斜率不连续等情况。所以,对模型拟合优度检验,经

常要求纯统计方法与 Duane 图结合运用。

17.2.5 多台系统同步增长的情形

对多台同型可修系统作同步可靠性增长试验时,同样可以使用 Duane 模型。在这种情况下, t 是单台系统的累积试验时间, $N(t)$ 是所有台(记为 k 台)可修系统在 $(0,t]$ 内的总失效次数,则 a 和 b 的最小二乘估计在形式上与式(17.12)相同,但系统的失效率变为

$$\hat{a} \hat{b} t^{\hat{b}-1} / k$$

定型时刻 T 以后,系统的 MTBF 为

$$\hat{M}(t) = k T^{1-\hat{b}} / (\hat{a} \hat{b}), \quad t \geq T \tag{17.15}$$

注意,Duane 模型使用方便、适用面广,但缺点是没有将 $N(t)$ 作为随机过程来处理,其模型参数及 MTBF 的点估计精度不高,不易给出当前 MTBF 的区间估计,后面将要介绍的 AMSAA 模型可以克服这些缺点。

例 17.2 某电子系统的初样,在 $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ 下通电工作 $T=154\text{ h}$ 试验,其失效数据如表 17.3 所列。

- ① 该系统有无可靠性增长?
- ② 此可靠性增长试验是否符合 Duane 模型?
- ③ 如符合,试求其可靠性增长的 Duane 曲线。
- ④ 试求定型后系统的 MTBF 的最小二乘估计 $\hat{M}(T)$ 。

表 17.3 电子系统的可靠性增长试验数据

时间/小时	2.5	4	8	36	45	74	104	154
累积失效次数	1	2	3	4	5	6	7	7

解: ① 由式(17.5)计算趋势检验统计量:

$$\mu = \left[\sum_{i=1}^M t_i / (MT) - 0.5 \right] \sqrt{12M} = -2.257$$

给定 $\alpha=0.05$,查表 17.1 得 $\mu_{\alpha/2}=-1.960$,所以由 $\mu < \mu_{\alpha/2}$ 可知:该产品有显著的可靠性增长趋势。

② $y=\ln N(t)$ 与 $x=\ln t$ 间的相关系数 $\hat{\rho}=0.962\ 8$,对 $n=8,\alpha=0.10$,查附表 B.14 得 $\hat{\rho}_{\alpha}=0.621\ 5$,所以由 $|\hat{\rho}| > \hat{\rho}_{\alpha}$ 可知:试验数据符合 Duane 模型。

③ 由式(17.12)得到 a 和 b 的最小二乘估计: $\hat{a}=0.947\ 218,\hat{b}=0.423\ 365$ 。

④ 系统的瞬时失效率的估计:

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{a} \hat{b} t^{\hat{b}-1} = 0.401\ 019 \times t^{-0.576\ 635}$$

定型后系统的 MTBF 的估计为

$$\hat{M}(t) = T^{1-\hat{b}}/(\hat{a} \hat{b}) = 45.5\ \text{h}$$

17.3 可靠性增长的 AMSAA 模型

为了克服 Duane 模型的缺点, Crow 在 Duane 模型基础上,提出了 AMSAA 模型,也称 Crow 模型。Crow 给出了模型参数的极大似然估计与无偏估计、系统 MTBF 的区间估计、模型拟合优度检验方法、分组数据的分析方法及丢失数据时的处理方法,系统地解决了 AMSAA 模型的主要统计推断问题。

1981 年,AMSAA 模型被美国军用手册 MIL—HDBK—189 详尽引用。1987 年,美国军用手册 MIL—HDBK—781 则进一步肯定了该模型。1989 年,该模型又被国际电工委员会 IEC 的 TC—56(CO)150 号文件(即《可靠性增长模型及估计方法》)采用。目前,AMSAA 模型已经成为应用最广泛的可靠性增长模型。

17.3.1 AMSAA 模型的数学描述

AMSAA 模型是指:

① 可修系统在开发期 $(0, t]$ 内的失效次数 $N(t)$ 是有均值函数 $EN(t) = \nu(t) = at^b$ 及瞬时失效强度 $\lambda(t) = dEN(t)/dt = abt^{b-1}$ 的非齐次泊松过程:

$$P\{N(t) = n\} = \frac{[\nu(t)]^n}{n!} e^{-\nu(t)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (17.16)$$

Kempthorne 和 Folks(1971)称失效强度为 $\lambda(t) = abt^{b-1}$ 的非齐次泊松过程 $\{N(t), t > 0\}$ 为威布尔过程。

② 可修系统开发到时刻 T 定型后,其失效时间服从指数分布,即 $\lambda(t) = abT^{b-1}, t \geq T$ 。

设可修系统在开发期 $(0, T]$ 内相继的失效时间为

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

对 AMSAA 模型,当 $0 < b < 1$ 时,失效时间间隔 $t_i - t_{i-1}$ 随机增加,系统处于可靠性增长之中;当 $b > 1$ 时,失效时间间隔 $t_i - t_{i-1}$ 随机减小,系统处于可靠性下降之中;当 $b = 1$ 时, $\lambda(t) = a$, 非齐次泊松过程退化为泊松过程,失效时间间隔 $t_i - t_{i-1}$ 服从指数分布,系统可靠性没有增长趋势,也没有下降的趋势。由此可以看出, b 是模型的关键参数,也称为增长参数。

17.3.2 定数截尾试验

设系统的失效时间依次为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 。对 $t > s$, $N(s, t) = N(t) - N(s)$ 服从均值为

$EN(t) - EN(s)$ 的泊松分布, 在无穷小的区间 $(t, t+dt)$ 内, 发生失效的概率为 $\lambda(t)dt$ 。考虑威布尔过程的独立增量性质, 可得到定数截尾数据 (t_1, t_2, \dots, t_n) 的似然函数, 即数据 (t_1, t_2, \dots, t_n) 的联合密度函数

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n \{P[N(t_{i-1}, t_i) = 0] \lambda(t_i)\} = (ab)^n e^{-a t_n^b} \times \prod_{i=1}^n t_i^{b-1}$$

因此得到 a, b 的极大似然估计

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n}{\hat{t}_n^{\hat{b}}} \\ \hat{b} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(t_n/t_i)} \end{aligned} \right\} \quad (17.17)$$

在时刻 t_n 的 MTBFM(t_n) 的极大似然估计为

$$\hat{M}(t_n) = \frac{t_n^{1-\hat{b}}}{\hat{a}\hat{b}} = \frac{t_n}{n\hat{b}} \quad (17.18)$$

此式给出了 \hat{b} 的统计意义, 如系统定型后, 不再改进, 则其失效服从泊松过程, 且有

$$\hat{M}(t_n) = t_n/n$$

由此可见, 当 $0 < \hat{b} < 1$ 时, 用威布尔过程描述的处于可靠性增长之中的系统失效强度的极大似然估计为 $n\hat{b}/t_n$; 而定型后不作改进的系统, 其失效服从泊松过程, 失效强度的极大似然估计为 n/t_n 。因此, 可靠性增长使系统消除了失效的 $(1-\hat{b}) \times 100\%$ 。

一般, 希望得到 $b, M(t_n)$ 的无偏估计和区间估计。为此先引述下面的定理。

定理 17.1 $S \stackrel{\text{def}}{=} at_n^b \sim \Gamma(n, 1)$ 与 $Z \stackrel{\text{def}}{=} nb/\hat{b} \sim \Gamma(n-1, 1)$ 相互独立。其中 $\Gamma(x, y)$ 指参数为 (x, y) 的伽马分布。

下面给出 b 的无偏估计和区间估计。

因为 $Z \stackrel{\text{def}}{=} nb/\hat{b} \sim \Gamma(n-1, 1)$, 所以 \hat{b} 是有偏的。而经计算

$$E(\hat{b}) = \frac{n}{n-2}b$$

因此, b 的无偏估计

$$\bar{b} = \frac{n-2}{n}\hat{b} = (n-2) \left/ \sum_{i=1}^n \ln(t_n/t_i) \right. \quad (17.19)$$

相应地得到 a 及 $M(t_n)$ 的估计

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= n/\bar{t}_n^{\bar{b}} \\ \bar{M}(t_n) &= t_n/(n\bar{b}) \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

此外,由 $nb/\hat{b} = (n-2)b/\bar{b} \sim \Gamma(n-1, 1)$, 可得

$$2(n-2)b/\bar{b} \sim \chi^2(2(n-1))$$

因此得到 b 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left\{ \frac{\bar{b}}{2(n-2)} \chi_{\alpha/2}^2(2(n-1)), \frac{\bar{b}}{2(n-2)} \chi_{1-\alpha/2}^2(2(n-1)) \right\} \quad (17.21)$$

下面给出 $M(t_n)$ 的区间估计, 见下述定理 (Crow, 1977, 1982, 或 Lee 和 Lee, 1978)。

定理 17.2 $M(t_n)$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的精确置信区间为

$$P[\rho_1 \bar{M}(t_n) \leq M(t_n) \leq \rho_2 \bar{M}(t_n)] = 1 - \alpha \quad (17.22)$$

其中, ρ_1, ρ_2 由下式确定, 即

$$\left. \begin{aligned} G\left(\frac{n(n-2)}{\rho_1} \mid n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} P[Z \cdot S \geq n(n-2)/\rho_1] = \alpha/2 \\ G\left(\frac{n(n-2)}{\rho_2} \mid n\right) &\stackrel{\text{def}}{=} P[Z \cdot S \geq n(n-2)/\rho_2] = 1 - \alpha/2 \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

且

$$G(\mu \mid n) = P\{Z \cdot S \geq \mu\} = \int_0^\infty \frac{x^{n-2} e^{-x}}{(n-2)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{x}\right)^i e^{-\frac{\mu}{x}} dx \quad (17.24)$$

ρ_i 的计算非常繁琐。为此, Crow(1982) 给出了失效次数 $n=2(1)30(5)50(10)80, 100$, 置信度为 0.80, 0.90, 0.95, 0.98 的相应的 ρ'_1, ρ'_2 的数表, 其中 $\rho'_i = \frac{n}{n-2} \rho_i$ ($i=1, 2$)。对于大样本情形 ($n > 100$), ρ_i 的近似公式 (Crow, 1982) 为

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{n-2}{n} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}} u_{1-\alpha/2} \right)^{-1} \\ \rho_2 &= \frac{n-2}{n} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{n}} u_{1-\alpha/2} \right)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17.25)$$

17.3.3 定时截尾试验

设系统的失效时间依次为 $0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$ 。与上一小节类似, 可得 a 和 b 的极大似然估计为

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= \frac{n}{T^{\hat{b}}} \\ \hat{b} &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(T/t_i)} \end{aligned} \right\} \quad (17.26)$$

注意, 以上的 \hat{b} 不是 b 的无偏估计, 在实际中, 一般使用以下的无偏估计:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \frac{n}{T} \\ \bar{b} &= \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n \ln(T/t_i)} \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

所以当 $t > T$, 系统不再改进, 其 MTBFM(t) 的估计为

$$\hat{M}(t) = T/(n\bar{b}) \quad (17.28)$$

b 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上限为

$$b_U = \frac{\bar{b}}{2(n-1)} \chi_{1-\alpha}^2(2n) \quad (17.29)$$

其中, $\chi_{1-\alpha}^2(2n)$ 是自由度为 $2n$ 的 χ^2 分布的 $1-\alpha$ 分位点。 $M(t)$ 的区间估计比较繁琐, 这里不作介绍, 感兴趣的读者可参阅参考文献[11]。

17.3.4 模型的拟合优度检验

系统的可靠性增长数据, 是否符合 AMSAA 模型, 需要进行拟合优度检验。有许多方法, 如 Crow(1975) 的 Cramér - Von Mises 检验、叶尔骅等(1988) 的 F 检验法、王静龙(1989) 的 χ^2 检验法。 MIL-HDBK-781 采用 Cramér - Von Mises 检验, 其检验效果较好。下面分别介绍这些方法。

① 图检验: 以失效时间 t 作横轴, 以 t_i 的均值 $E(t_i) = (i/\bar{a})^{1/\bar{b}}$ 作纵轴, 在线性尺度坐标纸上画出点 $(t_i, E(t_i)) (i=1, 2, \dots, n)$ 。如果这些点在通过原点的 45° 角的直线附近, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。

② χ^2 检验: 在定时截尾试验时, 记失效数据为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$ 。令 $x_{(i)} = \ln[T/t_{n-i+1}] (i=1, 2, \dots, n)$ 。检验统计量为

$$\chi^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_{(i)}}{\sum_{i=1}^k x_{(i)}} \right) \quad (17.30)$$

如果 $\chi_{\alpha/2}^2(2(n-1)) \leq \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2(n-1))$, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。

在定数截尾试验时, 记失效数据为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 。令 $x_{(i)} = \ln[t_n/t_{n-i}] (i=1, 2, \dots, n-1)$, 检验统计量为

$$\chi^2 = 2 \sum_{k=1}^{n-2} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_{(i)}}{\sum_{i=1}^k x_{(i)}} \right) \quad (17.31)$$

如果 $\chi_{\alpha/2}^2(2(n-2)) \leq \chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2(n-2))$, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。

③ F 检验: 在定时截尾试验时, 记失效数据为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < T$ 。令 $y_{(i)} = \ln[T/t_i]$

$t_{n-i+1}]$, $W_i = (n-i+1)(y_{(i)} - y_{(i-1)})$ ($i=1, 2, \dots, n$), $y_{(0)} = 0$, $r = [n/2]$ 。检验统计量为

$$F = \frac{\sum_{i=1}^r W_i / r}{\sum_{i=r+1}^n W_i / (n-r)} \tag{17.32}$$

如果 $F_{\alpha/2}(2r, 2(n-r)) \leq F \leq F_{1-\alpha/2}(2r, 2(n-r))$, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。

在定数截尾试验中, 记失效数据为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ 。令 $r = [(n-1)/2]$ 。检验统计量为

$$F = \frac{n-r-1}{r} \times \frac{(n-1)\ln t_n - \sum_{i=n-r}^{n-1} \ln t_i - (n-r-1)\ln t_{n-r}}{(n-r-1)\ln t_{n-r} - \sum_{i=1}^{n-r-1} \ln t_i} \tag{17.33}$$

如果 $F_{\alpha/2}(2r, 2(n-r-1)) \leq F \leq F_{1-\alpha/2}(2r, 2(n-r-1))$, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。

④ Cramér - Von Mises 检验: 检验统计量为

$$C_M^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{i=1}^M \left(Z_i^{\bar{b}} - \frac{2i-1}{2M} \right)^2 \tag{17.34}$$

对于不同的截尾方式, 上式中的各量如表 17.4 所列

表 17.4 C_M^2 统计量的相关参数表

项 目	M	Z_i	\bar{b}
定时截尾	n	t_i/T	$(n-1) / \sum_{i=1}^n \ln(T/t_i)$
定数截尾	$n-1$	t_i/t_n	$(n-2) / \sum_{i=1}^n \ln(t_n/t_i)$

如果 $C_M^2 \leq C_{M,\alpha}^2$, 则认为增长数据符合 AMSAA 模型, 否则不能用 AMSAA 模型。其中临界值 $C_{M,\alpha}^2$ 见附表 B.15。

17.4 可靠性增长的其他常用模型

前面介绍了两种常用的可靠性增长模型——Duane 模型和 AMSAA 模型, 还有许多其他的模型。本节将重点介绍 Gompertz 模型、Lloyd - Lipow 模型和 EDRIC 模型。

17.4.1 Gompertz 模型

Gompertz 模型是从时间序列分析中演化过来的, 用于描述增长过程。其特点是: 起初增

长较慢,随后逐渐加快,而达到某一点后,增长速度又开始减慢。不少产品在研制阶段的可靠性符合这种增长趋势。

记产品在时间 t (可以是次数等) 的可靠度为 $R(t)$, 则 Gompertz 模型为

$$R(t) = a b^{c^t} \quad (17.35)$$

其中, $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 且 a 是产品可靠性增长的上界; ab 为产品可靠性的初始水平; c 反映增长速度, c 值小, 增长速度快; c 值大, 增长速度慢。应用 Gompertz 模型的步骤如下:

① 分 N 个阶段(按等时间或等试验次数间隔)进行试验, 将第 i 个阶段的数据转成相应的可靠性值 $R_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。例如, 第 i 个阶段的二项数据为 (n_i, s_i) , 即进行 n_i 次试验, 成功 s_i 次, 则 $R_i = s_i/n_i$ 。

② 将 $R_i (i=1, 2, \dots, N)$ 分成个数相等的三组数据(当 N 不是 3 的倍数时, 可略去初始的一个或两个数据), 每组 n 个数据, 即第一组为 R_1, \dots, R_n ; 第二组为 R_{n+1}, \dots, R_{2n} ; 第三组为 R_{2n+1}, \dots, R_{3n} , 并记

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \ln R_i, \quad S_2 = \sum_{i=n+1}^{2n} \ln R_i, \quad S_3 = \sum_{i=2n+1}^{3n} \ln R_i$$

③ 求 a, b, c 和 $R(t)$ 的估计:

$$\left. \begin{aligned} \hat{a} &= e^{\frac{1}{n} \left(S_1 - \frac{S_1 - S_2}{1 - \hat{c}^n} \right)}, & \hat{b} &= e^{\frac{(S_1 - S_2)(1 - \hat{c})}{(1 - \hat{c}^n)^2}}, & \hat{c} &= \left(\frac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1} \right)^{1/n} \\ \hat{R}(t) &= \hat{a} \hat{b}^{\hat{c}^t} \end{aligned} \right\} \quad (17.36)$$

④ 进行拟合优度检验: 先由式(17.36)计算出各 \hat{R}_i , 注意到 ab 为产品的初始可靠性, 所以 $\hat{R}_0 = \hat{a} \hat{b}$ 。将 \hat{R}_i 与 R_i 比较, 若 $|\hat{R}_i - R_i|$ 足够小, 并且 $\hat{R}_i - R_i$ 的符号随机(这可用符号检验来验证), 则认为可用 Gompertz 模型。

⑤ 进行预测及决策, 求出任务时间的可靠性。据此作出决策, 如保持或修改可靠性增长规划, 产品是否达到验收要求, 等等。

17.4.2 Lloyd-Lipow 模型

设研制试验分为 m 个阶段, 各阶段的试验结果相互独立, 每个阶段的试验信息都被用来改进产品, 然后再作下一阶段的试验, 第 i 个阶段的二项数据为 (n_i, s_i) , 即进行 n_i 次试验, 成功 s_i 次, 该阶段的可靠性为 R_i 。Lloyd-Lipow 增长模型为

$$R_i = R_\infty - a/i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (17.37)$$

其中, $R_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} R_i$ 是系统的极限可靠性, $a > 0$ 为增长率。 R_∞ 和 a 的最小二乘估计为

$$\left. \begin{aligned} R_{\infty} &= \frac{c_2 \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{n_i} - c_1 \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{in_i}}{c_2 m - c_1^2} \\ \hat{a} &= \frac{c_1 \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{n_i} - m \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{in_i}}{c_2 m - c_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (17.38)$$

其中, $c_1 = \sum_{i=1}^m i^{-1}$, $c_2 = \sum_{i=1}^m i^{-2}$ 。由此可得 R_i 的估计

$$\hat{R}_i = \hat{R}_{\infty} - \hat{a}/i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

例 17.3 研制某产品,作了 $m=20$ 个阶段的二项试验,结果如表 17.5 所列。求产品的可靠性增长的 Lloyd-Lipow 方程。

表 17.5 某产品可靠性增长试验数据

i	n_i	s_i	i	n_i	s_i	i	n_i	s_i	i	n_i	s_i
1	10	5	6	10	7	11	10	9	16	10	8
2	8	5	7	10	8	12	11	10	17	10	9
3	9	6	8	10	7	13	12	9	18	10	9
4	8	7	9	10	6	14	10	8	19	10	10
5	10	6	10	11	7	15	10	7	20	10	9

解: $m=20$, 由式(17.38)计算得到 R_{∞} 和 a 的最小二乘估计为

$$\hat{R}_{\infty} = 0.802, \quad \hat{a} = 0.248$$

因此得到 Lloyd-Lipow 方程为

$$\hat{R}_i = 0.802 - 0.248/i, \quad i = 1, 2, \dots, 20$$

17.4.3 EDRIC 模型

EDRIC 模型曾被 IEC TC-56(sec) 164(1982)所引用。它要求将关联失效分析分为系统性失效及残余失效,然后找出每种系统性缺陷所导致的首次失效时间。其第 j 个系统性缺陷的首次失效时间的期望值为

$$T_j = \frac{1}{c} \sum_{i=0}^{j-1} (k-i)^{-1}, \quad j \leq k \quad (17.39)$$

其中, c, k 为待估参数, k 为固有的系统性缺陷的总数,它总是一个正整数。

如果在观测到 y 个系统性缺陷后停止改进,则预计的失效率可用下式估计,即

$$\hat{\lambda}_f = \hat{z}_y + \hat{\lambda}_s + \hat{\lambda}_c \quad (17.40)$$

其中, $\hat{z}_y = \sum_{j=y+1}^k 1/T_j$ 是尚未观测的系统性缺陷的失效率之和; $\hat{\lambda}_s = T_m^{-1} + T_n^{-1} + \dots$ 是 $j=m, n, \dots$ 时已被观测到的但未消除的系统性缺陷的失效率之和; $\hat{\lambda}_c$ 是残余失效率。

要得到一个有效的估计, 至少需要 10 个以上的关联的系统性失效, 并在 j 对 t 的线性坐标纸上描点, 要求点对曲线的散布较小; 如果散布较大, 则在估计前应有 20 以上的系统性失效, 而观测到的残余失效的个数不是关键问题。

应用 EDRIC 模型的步骤如下:

① 从数据中排除所有的非关联失效。对于一个有效的估计, 应注意前面所提到的最小关联的系统性失效次数。

② 将所有关联失效分为系统性缺陷的首次失效、系统性缺陷的再次失效及残余失效。

③ 将数据整理成累积关联试验时间, 给出每一种系统性缺陷的首次失效时间(在这一步中, 常将任何系统性缺陷的再次失效忽略, 但是较好的估计是利用缺陷的所有失效的平均值)。

④ 为估计 k , 给出 k 的初值, 且使 $k > y$, 这里 y 是观测到的系统性缺陷的总数。

⑤ 记第 j 次系统性缺陷所导致的失效时间为 t_j ($j=1, 2, \dots, y$), 计算:

$$P_j = \left[\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{k-i} \right]^{-1}, \quad S_1 = \sum_{j=1}^y \ln P_j, \quad S_2 = \sum_{j=1}^y P_j t_j \quad (17.41)$$

⑥ 计算似然函数的变量部分:

$$L = S_1 - y \ln S_2 \quad (17.42)$$

⑦ 重复第⑤步及第⑥步, 每次使 k 增加 1, 开始 L 增加, 然后达到极大值(若达不到极大值, 则表明本模型不适用于所给出的数据组)。使 L 为最大的 k 值, 即 k 的极大似然估计, 记为 \hat{k} 。

⑧ 计算 c 的极大似然估计 \hat{c} :

$$\hat{c} = y/S_2 \quad (17.43)$$

其中, S_2 相应于 \hat{k} 的值。

⑨ 计算尚未观测到的系统性失效的失效率之和的估计值:

$$\hat{z}_y = \hat{c} \sum_{j=y+1}^{\hat{k}} P_j \quad (17.44)$$

其中, P_j 相应于 \hat{k} 的值。

⑩ 计算已被检测到, 但未消除而再现的系统性失效的失效率之和的估计值(例如, 第 n 个, 第 m 个, \dots):

$$\hat{\lambda}_s = \hat{c}(P_n + P_m + \dots) \quad (17.45)$$

P_n, P_m, \dots 由第⑤步的 P_j 给出。

⑪ 计算残余失效率的估计值:

$$\hat{\lambda}_c = X_c/T^* \tag{17.46}$$

其中, X_c 是残余失效数, T^* 是关联试验时间。

⑫ 计算总失效率:

$$\hat{\lambda}_f = \hat{z}_y + \hat{\lambda}_s + \hat{\lambda}_c \tag{17.47}$$

相应的 MTBF 为 $\hat{\theta}=\hat{\lambda}_f^{-1}$ 。

⑬ 由式(17.39),对每个 j 值,计算失效的期望时间 T_j 。根据失效的观测时间-期望时间在普通坐标纸上作图,并作相关评定。

习 题

17.1 某台产品在可靠性增长试验中发生了 22 次失效,试验数据有 5 组,用累积试验时间及其对应的累积失效次数表示为(100,3),(200,6),(500,13),(800,18),(1 000,22),试用Duane模型评估试验结束时的 MTBF。

17.2 某台产品在可靠性增长试验中发生了 52 次失效,失效发生的时刻(单位:h)依次为 2,4,10,15,18,19,20,25,39,41,43,45,47,66,88,97,104,105,120,196,217,219,257,260,281,283,289,307,329,357,372,374,393,403,466,521,556,571,621,628,642,684,732,735,754,792,803,805,832,836,873,975。试验于 $t_n=975$ h 失效截尾。使用 AMSAA 模型对上述失效数据进行分析,求出试验结束时的 MTBF。

17.3 某产品的预期研制周期为 12 个月,要求在研制结束时的可靠性不低于 92 %。研制过程中前 6 个月的可靠性信息见题表 17.1,每次试验后,进行相应的设计或工艺改进。问:

- ① 在 12 个月研制结束时,产品可靠性水平如何,能否达到预期目标?
- ② 如果按照前 6 个月的可靠性增长规划继续增长,产品可靠性能够达到的上限是多少?
- ③ 预测的可靠性与实际可靠性比较,符合程度如何?

题表 17.1 前 6 个月的可靠性信息

组 号	研制时间	可靠性 $R/(%)$	$\ln R$	组 号	研制时间	可靠性 $R/(%)$	$\ln R$
1	0	58.0	4.060 44	2	3	78.0	4.356 71
1	1	66.0	4.189 65	3	4	82.0	4.406 72
2	2	72.5	4.283 59	3	5	85.0	4.442 65

第 18 章 系统可靠性评估的经典统计方法

系统可靠性置信下限的估计是可靠性统计中的一个重要研究方向。利用数理统计方法,在系统的研制、生产阶段直到交付使用单位之前,都可以根据部件、分系统和系统级的试验数据对整个系统的可靠性作出评价。这不仅可以节省大量的整机试验费用,而且可以对系统性能的改进提供技术支持,因此它是国内外可靠性工程师和统计工作者们非常关注的问题。另外,从实际的工程背景的角度来看,通常构成系统的部件或分系统都有较多的寿命试验数据,而整个系统的寿命试验数据则较少,甚至没有。一般来讲,系统的可靠性水平往往取决于部件的可靠性水平,因此充分利用部件和分系统的寿命试验数据可以得到更多的有关系统可靠性方面的信息。通常采用金字塔式结构进行可靠性综合评估,其原理是把下一级功能单元的试验信息向上一级折合,再把折合信息与上一级的试验信息综合,依次从低到高进行各级系统可靠性综合评估,以达到可以用极少次数的整体系统试验对复杂系统的可靠性作出高置信水平评估的目的。其关键在于将所有各级试验信息逐级向上综合并充分利用。

当系统的状态与组成系统的 m 个单元状态有关时,可将系统可靠性 R_s 表示为各单元可靠性 $R_i (i=1,2,\dots,m)$ 的函数 $R_s = \psi(R_1, R_2, \dots, R_m)$ 。 R_s 称为系统可靠性函数。当系统可靠性函数是单元可靠性 $R_i (i=1,2,\dots,m)$ 的非降函数时,称系统为单调关联系统。一般,单调关联系统的可靠性函数可由最小路集的并联或其最小割集的串联求出。

18.1 成败型数据情形下系统的可靠性

设系统由 m 个单元组成,第 i 个单元的可靠性为 R_i ,系统的可靠性 $R = \psi(R_1, R_2, \dots, R_m)$, ψ 是已知函数,表示系统的可靠性结构。

设对第 i 个单元进行了 n_i 次试验,其中成功 s_i 次,失败 r_i 次, $n_i = s_i + r_i (i=1,2,\dots,m)$, $n_i \geq 1, s_i \geq 0, r_i \geq 0$ 。令

$$\mathbf{Z} = (s_1, s_2, \dots, s_m) \quad (\text{数据向量}) \quad (18.1)$$

$$\boldsymbol{\theta} = (R_1, R_2, \dots, R_m) \quad (\text{参数向量}) \quad (18.2)$$

假定各单元的试验相互独立进行。易知 \mathbf{Z} 的概率分布为

$$P_{\boldsymbol{\theta}}[\mathbf{Z} = (i_1, i_2, \dots, i_m)] = \prod_{k=1}^m \binom{n_k}{i_k} R_k^{i_k} (1 - R_k)^{n_k - i_k}$$

将 \mathbf{Z} 的所有可能取值按顺序排列为

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_L$$

其中, $L = \prod_{i=1}^m (n_i + 1)$ 。令

$$G(z, \theta) = \sum_{z_k \geq z} P_{\theta}(Z = z_k) \quad (18.3)$$

$$R_L(z) = \inf\{\phi(\theta) : G(z, \theta) > \alpha\} \quad (18.4)$$

如果 $R_L(z)$ 满足

$$P_{\theta}[R \geq R_L(z)] \geq 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

那么, $R_L(z)$ 是系统可靠性 R 的 $1 - \alpha$ 水平置信下限。

18.1.1 成败型数据情形下系统可靠性的精确置信限

1. 串联系统

串联系统的可靠性结构方程为 $\phi(R_1, R_2, \dots, R_m) = \prod_{i=1}^m R_i$, 基于 $Z = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ 得到 R

的极大似然估计为

$$\hat{R} = \prod_{i=1}^m \frac{s_i}{n_i}$$

按 \hat{R} 值从大到小的顺序把 Z 的所有可能值排序 (\hat{R} 越大, 相应的 Z 排得越前), 即称 $z = (s_1, s_2, \dots, s_m) \geq z = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ (当且仅当 $\prod_{j=1}^m \frac{s_j}{n_j} \geq \prod_{j=1}^m \frac{s_j}{n_j}$)。这个排序法是 Winterbottom (1974) 正式提出的, 简称 W 排序法, 也称最大可能排序法 (LP 方法)。显然, 在 W 排序法下, 无失效数据 $z^* = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ 排在第一位, 这时式 (18.3) 化为

$$G(s_1, s_2, \dots, s_m, \theta) = P_{\theta} \left(\hat{R} \geq \prod_{j=1}^m \frac{s_j}{n_j} \right)$$

利用式 (18.4) 计算置信下限 R_L 一般相当复杂, 尤其对于复杂的系统。但对于常见的无失效数据 $z^* = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $R_L(z^*)$ 却有简单公式。当然, 这里的 W 排序法是否合理值得研究。黄柏琴等 (1987) 发现了 W 排序法的缺点并提出了改进意见 (见参考文献 [12])。

定理 18.1 设系统各单元的试验结果均为无失效数据, 则系统可靠性 R 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信下限为

$$R_L(n_1, n_2, \dots, n_m) = \alpha^{1/n_*} \quad (18.5)$$

其中, $n_* = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$ 。

如令式 (18.5) 中的 $m = 1$, 则有 $R_L(n_1) = \alpha^{1/n_1}$ 。可见各单元的试验结果均为无失效数据的情形, 等价于整个系统进行了 $n_* = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$ 次试验而没有出现失效的情形。

定理 18.2 设 $n_1 = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$, 则

$$R_L(n_1, n_2, \dots, n_m) = \left\{ 1 + \frac{n_1 - s_1 + 1}{s_1} F_{1-\alpha}(2(n_1 - s_1 + 1), 2s_1) \right\}^{-1}$$

并且,当 $s_1=0$ 时规定 $R_L=0$ 。换句话说,这与对整个系统进行了 n_1 次试验、成功 s_1 次时的置信限公式是一样的。

2. 并联系统

设并联系统由 m 个单元组成,第 i 个单元的可靠性是 $R_i (i=1,2,\cdots,m)$,则系统的可靠性为 $R=1-\prod_{i=1}^m (1-R_i)$,基于式(18.1)可得到 R 的极大似然估计为

$$\hat{R} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - s_i/n_i)$$

令

$$\tilde{R} = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - \tilde{R}_i) \quad (18.6)$$

这里

$$\tilde{R}_i = \begin{cases} s_i/n_i, & s_i < n_i \\ (0.5)^{1/n_i}, & s_i = n_i \end{cases} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (18.7)$$

利用排序函数 \tilde{R} 来寻求 R 的置信下限。 \tilde{R} 是 \hat{R} 的一种修正,其好处是:当 $s_i=n_i$ 时更能体现 n_i 值的作用。

令

$$G(u, \theta) = P_\theta(\tilde{R} \geq u) \quad (18.8)$$

$$R_L(u) = \inf\{R = \phi(\theta) : G(u, \theta) > \alpha\} \quad (18.9)$$

其中, $\theta=(R_1, R_2, \cdots, R_m)$, $\phi(\theta)=1-\prod_{i=1}^m (1-R_i)$, $P_\theta(A)$ 表示各单元可靠性的真值分别为 R_1, R_2, \cdots, R_m 时事件 A 的概率, $0 < \alpha < 1$ 。因此

$$P_\theta[R \geq R_L(\tilde{R})] \geq 1 - \alpha \quad (\forall \theta)$$

其中, $R_L(\tilde{R})$ 即是系统可靠性的 $1-\alpha$ 水平置信下限。Fang 和 Chen(1999)给出了 $G(u, \theta)$ 和 $R_L(u)$ 的计算方法,具体如下:

由于 $\phi(\theta)$ 是连续函数,统计量 $\tilde{R} \in [0, u_0]$, 其中 $u_0 = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - 0.5)^{1/n_i} < 1$, n_0 指对整个系统的试验次数。令

$$\bar{G}(u, c) = \sup\{G(u, \theta) : \phi(\theta) = c\}, \quad 0 \leq c \leq 1$$

Fang 和 Chen(1999)指出,当 $u \in (0, u_0]$ 时, $\bar{G}(u, c)$ 是 c 的严格增连续函数, $\bar{G}(u, 0) = 0$, $\bar{G}(u, 1) = 1$, 且 $R_L(u)$ 是方程 $\bar{G}(u, c) = \alpha (0 < c < 1)$ 的唯一根。可用 EM 算法计算 $\bar{G}(u, c)$ 的值,步骤如下:

令 $R_i^{(0)} = \tilde{R}_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 。

① 令 $\hat{s}_i = E_{R_1^0, R_2^0, \dots, R_m^0} (s_i | \tilde{R} \geq u)$, 即参数为 $R_1^0, R_2^0, \dots, R_m^0$ 时, s_i 满足 $\tilde{R} \geq u$ 条件下的数学期望。

② 如果所有的 i 都有 $\hat{s}_i = n_i$, 则令

$$R_i^{(1)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

否则, 求解关于 λ 的方程

$$\prod_{i=1}^m \frac{n_i + \lambda - \hat{s}_i}{n_i + \lambda} = 1 - c, \quad \lambda > -\min\{n_i - \hat{s}_i : 1 \leq i \leq m\}$$

然后令

$$R_i^{(1)} = \frac{n_i + \lambda - \hat{s}_i}{n_i + \lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

③ 如果 $\sum_{i=1}^m |R_i^{(1)} - R_i^{(0)}| < 10^{-6}$, 则停止循环; 否则, 回到步骤①, 令 $R_i^{(0)} = R_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$)。

最后得到 $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, \dots, R_m^{(1)}$, 相应的 $G(u, R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, \dots, R_m^{(1)})$ 就是 $\bar{G}(u, c)$ 的近似值。

3. 相同单元的情况

(1) 串联系统

若串联系统由 m 个相同的单元组成, 单元可靠性为 R_1 , 则系统可靠性 $R = R_1^m$ 。

由于 $P\{R_1 \geq R_{1,L}\} = \gamma$, 所以 $P\{R_1^m \geq R_{1,L}^m\} = \gamma$ 。另外, $P\{R \geq R_L\} = \gamma$, 比较即得

$$R_L = R_{1,L}^m \quad (18.10)$$

因此, 当单元试验 n_1 次无失效时, 即 $r_1 = 0$, 有

$$R_L = (1 - \gamma)^{m/n_1} \quad (18.11)$$

(2) 并联系统

m 个不可靠性为 p_1 的相同单元组成的并联系统, 其不可靠性 $p = p_1^m$ 。

因为 $P\{p_1 \leq p_{1,u}\} = \gamma$, 所以 $P\{p = p_1^m \leq p_{1,u}^m\} = \gamma$, 而 $P\{p \leq p_u\} = \gamma$, 则 $p_u = p_{1,u}^m$, $p_{1,u} = 1 - R_{1,L}$, 因此

$$R_L = 1 - p_u = 1 - p_{1,u}^m = 1 - (1 - R_{1,L})^m \quad (18.12)$$

因此, 当单元试验 n_1 次无失效时, 即 $r_1 = 0$, 则有

$$R_L = 1 - [1 - (1 - \gamma)^{1/n_1}]^m \quad (18.13)$$

例 18.1 两相同单元的并联系统, 若 $r_1 = 0$, 求 $\gamma = 0.95$, $R_L = 0.9999$ 所需的试验次数 n_1 。

解: 由式(18.13), 有

$$n_1 = \frac{\ln(1 - \gamma)}{\ln[1 - (1 - R_L)^{\frac{1}{2}}]} = 298.0729$$

各单元可靠性为 R_1 的 $k/N(G)$ 系统可靠性为

$$R = h(R_1) = \sum_{x=k}^N \binom{N}{x} R_1^x (1 - R_1)^{N-x}$$

由于 $h(R_1)$ 是 R_1 的严格单调上升函数, 又 $P\{R_1 \geq R_{1,L}\} = \gamma$, 故 $P\{R = h(R_1) \geq h(R_{1,L})\} = \gamma$ 。与 $P\{R \geq R_L\} = \gamma$ 比较, 易知

$$R_L = \sum_{x=k}^N \binom{N}{x} R_{1,L}^x (1 - R_{1,L})^{N-x} \quad (18.14)$$

例 18.2 对相同单元的 $k/N(G)$ 系统, 若 $N=10, k=9, n_1=30, r_1=0$, 求系统在 $\gamma=0.90$ 时的可靠性置信下限 R_L 。

解:

$$R_{1,L} = (1 - \gamma)^{1/n_1} = 0.926\ 119$$

$$R_L = R_{1,L}^{10} + 10R_{1,L}^9(1 - R_{1,L}) = 0.834\ 42$$

18.1.2 成败型数据情形下系统可靠性的近似置信限

由于系统可靠性的精确置信限计算量都较大, 不容易实现, 因此实际中经常采用近似方法。于是, 经典近似限的方法得到了长足的发展。以成败型串联系统可靠性的近似限为例, 其近似方法不下 50 种。Mann 等 (1974), Easterling (1972), Preston (1976), Winterbottom (1974), Spencer 和 Easterling (1986) 等都对此进行了讨论, 并对其中若干方法进行了比较, 认为 Easterling (1972) 的 MML (修正极大似然估计) 法、Preston (1976) 的 SR 法、Mann 等 (1974) 的 AO (渐近最优置信下界) 法和 LM (Lindstrom - Madden, 1962) 法较好。

LM 法由于计算简便, 公式易于理解, 便于向一般串联系统推广, 是保守近限中的较不保守者, 因此, 在工程中有广泛的应用。而 MML 法物理意义清楚, 便于金字塔式综合, 也易于指导工程实践。因此本节将重点介绍 LM 法和 MML 法。

1. LM 法

LM 法是由 Lindstrom 和 Madden (1962) 提供的近似方法, 适合于由多 (m) 个部件 (或子系统) 串联组成的系统。部件试验的样本量 n_j 可以不同, 若部件 j 在 n_j 次试验中有 r_j 次失效、 s_j 次成功, 则系统可靠性 R_s 的极大似然估计为

$$\hat{R}_s = \prod_{j=1}^m (n_j - r_j) / n_j$$

令 $n_* = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$, 得到 $r^* = n_* (1 - \hat{R}_s)$, $s^* = n_* \hat{R}_s$ 。将 n_* 和 s^* 看作是进行 n_* 次成败型试验, 有 s^* 次成功。然后再以通常的二项分布参数的区间估计方法求得系统可靠性 R_s 的置信下限。如果 s^* 不是整数, 可按 $(n_*, [s^*])$ 和 $(n_*, [s^*] + 1)$ 分别计算相应的置信下限, 然后再作插值计算, 得到系统在 (n_*, s^*) 条件下的近似置信下限。插值计算具体如下 (设置信水平为 $1 - \alpha$):

设 $R_{LM}^{(1)}$ 和 $R_{LM}^{(2)}$ 分别满足

$$\sum_{x=[s^*]}^{n_*} \binom{n_*}{x} (R_{\text{LM}}^{(1)})^x (1 - R_{\text{LM}}^{(1)})^{n_*-x} = \alpha$$

$$\sum_{x=[s^*]+1}^{n_*} \binom{n_*}{x} (R_{\text{LM}}^{(2)})^x (1 - R_{\text{LM}}^{(2)})^{n_*-x} = \alpha$$

当然 $R_{\text{LM}}^{(1)} < R_{\text{LM}}^{(2)}$ 。令

$$\hat{R}_{\text{LM}} = \hat{R}_{\text{LM}}^{(1)} + (s^* - [s^*]) (\hat{R}_{\text{LM}}^{(2)} - \hat{R}_{\text{LM}}^{(1)})$$

把 \hat{R}_{LM} 作为 R_s 的 $1-\alpha$ 水平(近似)置信下限。可以看出,该法简便易懂,因此,受到工程界的普遍欢迎。从精度上来看,虽然在某些情况过于保守,但比其他近似方法要好一些,也适用于小样本的情况,与 Lipow 和 Riley(1960)的表很接近。

为克服 LM 法所得到的置信下限一般偏保守的缺点,郑忠国等(1992)提出了修正的 LM 法,现介绍如下:

令

$$\hat{R}_i = \frac{s_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \hat{R}_0 = \prod_{i=1}^m \hat{R}_i$$

寻找满足

$$\frac{1}{m_0} \frac{1 - \hat{R}_0}{\hat{R}_0} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i} \frac{1 - \hat{R}_i}{\hat{R}_i} \quad (18.15)$$

的 m_0 。令 $s_* = m_0 \hat{R}_0$ 。把整个系统想象为:进行了 m_0 次试验,成功了 s_* 次。 m_0 是虚拟试验次数, s_* 是虚拟成功次数,二者不一定是整数,可用最接近的整数替代。然后用熟知的方法找出系统可靠性 R 的置信下限 R_L^* 。修正的 LM 法的优点是其置信下限具有相合性,具体如下述定理所述。

定理 18.3 对一切 $\theta = (R_1, R_2, \dots, R_m)$, 有

$$\textcircled{1} \quad \lim_{n_* \rightarrow \infty} P_\theta(R \geq R_L^*) = 1 - \alpha \quad (18.16)$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{m_0} (R - R_L^*) \xrightarrow{W} N[u_{1-\alpha}, R(1-R)] \quad (n \rightarrow \infty) \quad (18.17)$$

其中, $n_* = \min(n_1, n_2, \dots, n_m)$, W 表示依分布收敛。

应该指出,式(18.16)表达的是一种大样本性质,即修正的 LM 法在大样本情形下很合适。但样本量 n_* 不太大时, R_L^* 可能冒进(即出现 $P_\theta(R \geq R_L^*) < 1 - \alpha$)。郑洞国等(1993)还提出了更一般的修正 LM 法(又叫等效系统法)来处理两层数据的情形。此外,郭奎和于丹(2003)对 LM 法进行了推广,使之能够处理包括成败型部件和非成败型部件在内的串联系统。

2. MML 法

Easterling(1972)提出了 MML(修正的极大似然估计)法,该法与 LM 法类似。对含有多(m)个子系统的系统结构,且系统可靠性与子系统可靠性之间的关系为 $R_s = R(R_1, R_2, \dots,$

R_m), 若第 j 子系统在 n_j 次成败型试验中有 r_j 次失效、 s_j 次成功, 那么, 系统可靠性的极大似然估计为 $\hat{R}_s = R(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_m)$, 其中 \hat{R}_i 为 R_i 的极大似然估计, 即

$$\hat{R}_i = s_i/n_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

而 R_s 的渐近方差为

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial R_s}{\partial R_i} \right]^2 \cdot \text{var}(R_i)$$

其中, $\text{var}(R_i) = R_i(1-R_i)/n_i$, 则 σ^2 的估计量为

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial R_s}{\partial R_i} \Big|_{R_i=\hat{R}_i} \right]^2 \cdot \text{var}(\hat{R}_i) \quad (18.18)$$

其中, $\text{var}(\hat{R}_i)$ 为 $\text{var}(R_i)$ 中 R_i 由 \hat{R}_i 代替所得。令 $\hat{n} = \hat{R}_s(1-\hat{R}_s)/\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{s} = \hat{n}\hat{R}_s$ 。将 (\hat{n}, \hat{s}) 看作系统进行 \hat{n} 次成败型试验, 其中有 \hat{s} 次成功。再根据二项分布参数的区间估计方法导出 R_s 的置信下限。若 \hat{n} 和 \hat{s} 不为整数时, 则用插值法处理, 该置信限称为 MML 限。具体令

$$n_* = \begin{cases} [\hat{n}] + 1 & (\hat{n} \text{ 不为整数}) \\ \hat{n} & (\hat{n} \text{ 为整数}) \end{cases}$$

$$s^* = \begin{cases} [\hat{s}] + 1 & (\hat{s} \text{ 不为整数}) \\ \hat{s} & (\hat{s} \text{ 为整数}) \end{cases}$$

根据 (n_*, s^*) 求得二项分布参数的置信下限, 作为 R_s 的置信下限。为了与指数分布下的 MML 法相区分, 通常称之为 MMLI 法。

MML 法可以推广到其他分布的情形, 样本大小可以不同, 适用于各种可靠性综合模型。该法的计算量不大, 样本量在 10~20 的情况, MML 法比其他渐近方法要好些。

18.2 单元寿命服从指数分布情形下系统的可靠度

设系统由 m 个单元组成, 第 i 个单元的寿命服从失效率为 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$) 的指数分布。给定任务时间 t_0 , 第 i 个单元的可靠度是 $R_i = e^{-\lambda_i t_0}$ ($i=1, 2, \dots, m$)。设系统在 t_0 时刻的可靠度为 R (即系统寿命超过 t_0 的概率), 相应的可靠性结构方程为

$$R = \phi(R_1, R_2, \dots, R_m) \quad (18.19)$$

其中, $\phi(\cdot)$ 是已知函数, 表示系统结构。

面临的问题是: 首先根据各单元的试验数据, 估计未知的各单元失效率 λ_i ($i=1, 2, \dots, m$), 在此基础上, 求出系统可靠度的点估计和置信下限, 并且工程上特别关注后者。本节将以经常出现的有替换定总时和无替换定数截尾的情形为例进行讨论。

18.2.1 有替换定总时寿命试验

设对各单元分别独立进行有替换定总时寿命试验。第 i 个单元的截止总时间是 T_i , 共失效 r_i 次(即更换次数为 r_i)。易知 r_i 服从参数为 $\lambda_i T_i$ 的泊松分布, 即

$$P(r_i = k) = \frac{(\lambda_i T_i)^k}{k!} e^{-\lambda_i T_i}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (18.20)$$

若有数据 (T_i, r_i) , 则 λ_i 可用 $\hat{\lambda}_i = r_i / T_i$ 估计, 然后由式(18.19)得到系统可靠度 R 的点估计 $\hat{R} = \psi(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_m)$, 其中 $\hat{R}_i = e^{-\hat{\lambda}_i T_i}$ 。下面讨论系统可靠度 R 的置信下限的计算。

定理 18.4 设系统的可靠度 R 由式(18.19)给出, 其中 $R_i = e^{-\lambda_i T_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$)。令 $r = \sum_{i=1}^m r_i$, 得到 R 的 $1-\alpha$ 水平置信下限为

$$R_L \triangleq \inf \left\{ \psi(e^{-\lambda_1 T_1}, e^{-\lambda_2 T_2}, \dots, e^{-\lambda_m T_m}) : \lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, m; \sum_{i=1}^m \lambda_i T_i \leq \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2 (2r+2) \right\} \quad (18.21)$$

其中, T_i 是第 i 个单元事先指定的试验截止总时间, r_i 是失效数, r 是总失效数。

在定理 18.4 的假设下, 如果系统是单调的(即在式(18.19)中, 函数 ψ 对每个变元都是增函数), 则

$$R_L \triangleq \inf \left\{ \psi(e^{-\lambda_1 T_1}, e^{-\lambda_2 T_2}, \dots, e^{-\lambda_m T_m}) : \lambda_i > 0, \dots, \lambda_m > 0; \sum_{i=1}^m \lambda_i T_i = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2 (2r+2) \right\} \quad (18.22)$$

根据式(18.21)和式(18.22), 可以给出串联系统和并联系统的可靠度置信下限计算公式。

(1) 串联系统

设 $R = R(t_0)$ 是串联系统的可靠度, 系统含有 m 个单元, 各单元的寿命均服从指数分布, 有数据 (T_i, r_i) ($i = 1, 2, \dots, m$), 则系统可靠度 R 的 $1-\alpha$ 水平置信下限为

$$R_L = e^{-\frac{A}{T^*} t_0} \quad (18.23)$$

其中, $r = \sum_{i=1}^m r_i$, $T^* = \min(T_1, T_2, \dots, T_m)$, $A = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2 (2r+2)$ 。

(2) 并联系统

设 $R = R(t_0)$ 是并联系统的可靠度, 系统含有 m 个单元, 各单元的寿命均服从指数分布, 有数据 (T_i, r_i) ($i = 1, 2, \dots, m$), 则系统可靠度 R 的 $1-\alpha$ 水平置信下限为

$$R_L = 1 - \prod_{i=1}^m \left[\frac{(c-1)T_m}{(c-1)T_m + T_i} \right] \quad (18.24)$$

其中, $r = \sum_{i=1}^m r_i$, 而 c 是下述方程的唯一根, 即

$$\sum_{i=1}^{m-1} T_i \ln[(u-1)T_m + T_i] + T_m \ln u - \sum_{i=1}^{m-1} T_i \ln T_i - At_0 = 0, \quad 1 < u < \infty \quad (18.25)$$

其中, $A = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2(2r+2)$, 且规定 $\sum_{i=1}^0 a_i = 0$ 。

18.2.2 无替换定数截尾寿命试验

设系统由 m 个单元构成。若对第 i 个单元任取 n_i 个产品进行寿命试验, 试验进行到出现 r_i 个失效为止, 这里 r_i 是预先指定的正整数, $r_i \leq n_i$ 。设 $t_{i,1} \leq t_{i,2} \leq \dots \leq t_{i,r_i}$ ($i=1, 2, \dots, m$) 是各次失效的时刻, 则第 i 个单元的 n_i 个产品的试验总时间为

$$Z_i = \sum_{j=1}^{r_i} t_{i,j} + (n_i - r_i)t_{i,r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (18.26)$$

下面讨论如何利用数据 $\{(Z_i, r_i): i=1, 2, \dots, m\}$ 计算系统可靠度 $R(t_0)$ 的点估计和置信下限。

易知 λ_i 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda}_i = r_i / Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

然后由式(18.19)得出 R 的点估计 $\hat{R} = \psi(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_m)$, 其中 $\hat{R}_i = e^{-\hat{\lambda}_i t_0}$ ($i=1, 2, \dots, m$)。

下面寻找 $R(t_0)$ 的优良置信下限。由于

$$Z_i = \sum_{k=1}^{r_i} (n_i - k + 1)(t_{i,k} - t_{i,k-1}), \quad t_{i,0} \triangleq 0 \quad (18.27)$$

易知 $\{(n_i - k + 1)(t_{i,k} - t_{i,k-1}): 1 \leq k \leq r_i\}$ 是相互独立同分布的随机变量组, 其共同分布是失效率为 λ_i 的指数分布, 故 $2\lambda_i Z_i$ 服从自由度为 $2r_i$ 的 χ^2 分布。由于各单元的试验是独立进行的,

故 $\sum_{i=1}^m 2\lambda_i Z_i$ 服从自由度为 $2r$ 的 χ^2 分布, 其中 $r = \sum_{i=1}^m r_i$ 。于是

$$P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m} \left[2 \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i \leq \chi_{1-\alpha}^2(2r) \right] = 1 - \alpha \quad (18.28)$$

这里 $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m}(A)$ 表示各单元的失效率依次为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 时事件 A 的概率。

令

$$S = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) : \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i \leq \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2(2r) \right\} \quad (18.29)$$

从式(18.28)可知 S 是 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 的 $1-\alpha$ 水平“置信集”。

定理 18.5 设系统可靠度 $R=R(t_0)$ 由式(18.19)定义, 其中 $R_i = e^{-\lambda_i t_0}$ ($i=1, 2, \dots, m$),

(n_i, r_i, Z_i) 是第 i 个单元的数据 (Z_i 的定义见式 (18.27)), 则 R 的 $1-\alpha$ 水平置信下限为

$$R_L \triangleq \inf \left\{ \phi(e^{-\lambda_1 t_0}, e^{-\lambda_2 t_0}, \dots, e^{-\lambda_m t_0}) : \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_m > 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^m \lambda_i Z_i \leq \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2(2r) \right\} \quad (18.30)$$

其中, $r = \sum_{i=1}^m r_i$ 。

定理 18.6 设 R_L 按照式 (18.30) 定义, 则有如下结论:

① 对于串联系统

$$R_L = e^{-\frac{A}{Z^*} t_0} \quad (18.31)$$

其中, $Z^* = \min(Z_1, Z_2, \dots, Z_m)$, $A = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2(2r)$, $r = \sum_{i=1}^m r_i$ 。

② 对于并联系统

$$R_L = 1 - \prod_{i=1}^m \left[\frac{(c-1)Z_m}{(c-1)Z_m + Z_i} \right] \quad (18.32)$$

其中, c 是方程

$$\sum_{i=1}^{m-1} Z_i \ln[(u-1)Z_m + Z_i] + Z_m \ln u - \sum_{i=1}^{m-1} Z_i \ln Z_i - A t_0 = 0, \quad u > 1$$

的唯一根, 这里 $A = \frac{1}{2} \chi_{1-\alpha}^2(2r)$, $r = \sum_{i=1}^m r_i$ 。

式 (18.31) 和式 (18.32) 分别给出了串联系统和并联系统的可靠度的 $1-\alpha$ 水平置信下限, 其计算简单。直观上, 对式 (18.32) 看不出什么, 但对式 (18.31), 结果可能保守, 因为它只用到 Z_1, Z_2, \dots, Z_m 中的最小值 Z^* , 而未用 Z_1, Z_2, \dots, Z_m 的全部信息, 利用信息不充分。因此, 对于串联系统应进一步寻找基于全部数据 Z_1, Z_2, \dots, Z_m 的置信下限。

Mann 和 Grubbs(1972) 将 Grubbs(1971) 的信任界限的思想方法和 EI Mawaring 和 Buehler(1967) 的思想方法结合起来, 得到了近似最优的置信界。该法在工程上叫做近似最优法 (即 AO 法), 适用于串联系统, 各子系统为指数分布的定数截尾寿命试验。这里采用 Mann(1974) 的叙述, 具体如下:

Mann 得到了拟合分布的均值和方差分别为

$$m_0 = \sum_{j=1}^m \frac{r_j - 1}{Z_j} + (Z^*)^{-1} \quad \text{与} \quad V = \sum_{j=1}^m \frac{r_j - 1}{Z_j^2} + (Z^*)^{-2} \quad (18.33)$$

并得到串联系统可靠度 $R(t_0)$ 的 $1-\alpha$ 置信下限为

$$R_L(t_0) = e^{-t_0 m_0 \left(1 - \frac{V}{9m_0^2} + \frac{1-\alpha}{3m_0} V^{1/2} \right)^3} \quad (18.34)$$

其中, t_0 为任务时间。

例 18.3 设系统由 5 个单元串联而成, 每个单元的寿命均服从指数分布。对各单元分别进行

定数截尾寿命试验。对第 i 个单元同时取 10 件产品进行试验,直到出现 r_i 个产品失效时停止, $r_1=4,r_2=2,r_3=2,r_4=r_5=3$ 。观测数据如表 18.1 所列。试在任务时间为 1 000 h 时,计算系统可靠度的 0.75 水平近似置信下限。

表 18.1 各单元产品的寿命数据

$t_{i,j}$ i	各试验产品的寿命/h			
1	619	700	900	1 100
2	1 146	1 650		
3	1 697	2 800		
4	1 311	2 000	2 900	
5	2 000	4 439	7 000	

解：采用 AO 法。首先计算 $Z_i(i=1,2,\cdots,5)$ ：

$$Z_1=9\,919,\quad Z_2=15\,996,\quad Z_3=26\,897,\quad Z_4=26\,511,\quad Z_5=62\,439$$

由式(18.33)计算 m_0,V ：

$$m_0=0.000\,601\,3,\quad V=4.93\times10^{-8}$$

由 $\alpha=0.25,t=1\,000\text{ h}$,利用式(18.34)计算得出系统可靠度 $R=R(1\,000)$ 的 0.75 水平近似置信下限为

$$R_L=0.476$$

18.3 混合数据情形下系统的可靠度

前面介绍了成败型数据和指数分布数据情形下的系统可靠性评估,但是实际中的复杂系统,经常是多种数据的混合,目前尚无具有实用价值的精确方法。通常的做法是,先把组成单元数据或子系统数据统一折合为成败型数据或者指数型数据,然后借助于 LM 法或者 MML 法来进行系统可靠性评估。下面介绍 MML 法的指数形式 MMLII,然后给出常用的几种不同分布的试验数据之间的转换方法。

18.3.1 MMLII 法

设系统由 m 个单元 U_1,U_2,\cdots,U_m 组成,各单元的可靠度分别为 R_1,R_2,\cdots,R_m ,系统可靠度 $R=\psi(R_1,R_2,\cdots,R_m)$ 。对各单元分别独立地进行若干次试验(包括截尾试验),得到 R_i 的极大似然估计 \hat{R}_i ,令 $\hat{R}=\psi(\hat{R}_1,\hat{R}_2,\cdots,\hat{R}_m)$,找出 \hat{R} 的方差的渐近式

$$D(R_1,R_2,\cdots,R_m;\boldsymbol{\varphi}) \tag{18.35}$$

它是在各单元进行试验的次数或试验时间无限增大时,渐近方差真值,其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 指与各单元试验次数或时间有关的向量。令

$$\hat{D} = D(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_m; \boldsymbol{\varphi}) \quad (18.36)$$

将各单元试验数据折合成对系统进行有替换的定时截尾指数寿命试验的数据。设想整个系统的寿命服从指数分布,进行了有替换的试验,到时间 t_0 截止,累积失效数为 τ ,则系统可靠度 $R=R(t)$ (t 是任务时间)的极大似然估计为

$$\tilde{R} = e^{-\frac{\tau}{t_0}}$$

易知

$$\text{var}(\tilde{R}) \approx R^2 \frac{t^2 \tau}{t_0^2}$$

自然想到应选 t_0, τ 满足

$$\tilde{R} = \hat{R} = \psi(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_m), \quad (\hat{R})^2 \frac{\tau^2 \tau}{t_0^2} = \hat{D} \quad (18.37)$$

这里 \hat{D} 由式(18.26)定义。于是可求得

$$t_0 = \frac{(\hat{R})^2 (\ln \hat{R}) t}{\hat{D}}, \quad \tau = \frac{(\hat{R} \ln \hat{R})^2}{\hat{D}} \quad (18.38)$$

这样确定的 τ 不一定是整数,可用最相近的整数代替。然后利用指数分布定时截尾情形下的公式就可得到 R 的 $1-\alpha$ 水平近似置信下限。尤其对串联系统,由式(18.23)可知,系统可靠度 $R=R(t)$ 的 $1-\alpha$ 水平近似置信下限为

$$R_L = e^{-\frac{t}{2t_0} \chi_{1-\alpha}^2 (2\tau+2)} \quad (18.39)$$

MMLII 法的关键是计算式(18.36)定义的 \hat{D} ,为此需要利用 Taylor 公式对方差 $\text{var}(\hat{R})$ 进行研究,对此感兴趣的读者可参阅参考文献[44]的第 10 章。

18.3.2 不同分布类型试验数据的转换

通常不同分布之间的数据转换采用矩方法,令相互转化的两个分布的前几阶矩对应相等,进行相互转换或者折合。除了矩方法之外,还有点估计下限法和两点折合法等。这里仅以成败型数据和指数型数据间的相互转化为例进行介绍。

已知指数产品寿命试验数据的失效数 τ ,等效任务时间为 t_0 ,假设将它转换成成败型数据 (n, s) 。

当 $\tau \neq 0$ 时,由式(18.37)、式(18.38)与前两阶矩对应相等,可得

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{t_0^2}{\tau} \left(e^{\frac{\tau}{t_0}} - 1 \right) \\ s &= n \cdot e^{-\frac{\tau}{t_0}} \end{aligned} \right\} \quad (18.40)$$

成败型数据转换为指数型数据

已知成败型数据为 (n, s) , 假设将它转换为指数寿命试验数据的等效任务时间 t_0 , 失效数为 τ 。

当 $s < n$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \frac{ns}{n-s} \ln\left(\frac{n}{s}\right) \\ \tau &= t_0 \ln\left(\frac{n}{s}\right) \end{aligned} \right\} \quad (18.41)$$

当 $s = n$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= n \\ \tau &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18.42)$$

习 题

18.1 对于一个成败型串联系统, 各单元分别进行了 20, 23, 29, 30, 31 次试验, 都没有发生失败, 计算系统在 90 % 的置信水平下的可靠度置信下限。

18.2 对于一个由两个成败型部件并联组成的系统, 各部件试验数据为 $(n_1, r_1) = (6, 3)$, $(n_2, r_2) = (7, 2)$, 计算系统在 80 % 的置信水平下的可靠度置信下限。

18.3 指数串联系统, $n = 5$, $(T_1, r_1) = (600, 2)$, $(T_2, r_2) = (500, 1)$, $(T_3, r_3) = (400, 1)$, $(T_4, r_4) = (300, 1)$, $(T_5, r_5) = (200, 1)$, 其中 T_i, r_i 分别指各单元的总试验时间(单位:h)与故障次数, 计算系统在 90 % 置信水平下的可靠度置信下限。

18.4 对一个指数和一个成败型单元的串联系统, 成败型试验数据 $(n, r) = (41, 1)$, 指数型定总时试验数据 $(T, r) = (100, 1)$, 计算系统在 90 % 的置信水平下的可靠度置信下限。

18.5 有一个一般的串联系统, 由两个成败型单元、两个指数型单元和已知前两阶矩的单元组成。成败型试验数据为 $(60, 1)$, $(50, 1)$; 指数单元定总时的试验数据为 $(55, 1)$, $(65, 1)$; 另一个单元的一阶矩和二阶矩分别为 $(0.9857, 0.9718)$, 计算系统在 90 % 的置信水平下的可靠度置信下限。

第 19 章 系统可靠性综合评估的 WCF 法

系统可靠性置信下限的估计是系统可靠性评估关注的主要问题。但大部分方法的适用范围较窄,要么仅适用于可靠性结构特殊的系统,要么对组成部分的寿命分布和试验数据有诸多限制。尤其在系统及其组成单元的试验数据为小子样情形时,常见的方法难以满足工程需求。为此,基于统计量的二阶正态逼近,于丹等(1996)给出了复杂系统可靠性综合评估的 WCF 展开方法。与现有综合方法比较,WCF 展开方法有如下几个特点:

- ① 仅要求系统可靠性结构是单调关联的,因此对系统结构具有较广泛的适用性;
- ② 适用于常用的设备寿命分布类型及试验数据类型,例如:成败型试验数据、指数寿命型(定数截尾、定时截尾及定总时截尾)试验数据、威布尔寿命分布定时截尾型试验数据及“应力-强度”模型试验数据;
- ③ 部分解决了中小子样情形下的可靠性综合问题;
- ④ 实现了经典统计方法和 Bayes 方法的融合;
- ⑤ 算法具有模块化结构。

19.1 预备知识

19.1.1 累量及其性质

定义 19.1 若随机变量 X 的各阶矩都存在,则下面的等式恒成立,即

$$e^{k_1 t + k_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + k_r \frac{t^r}{r!} + \dots} = 1 + \mu_1 t + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \mu_r \frac{t^r}{r!} + \dots \quad (19.1)$$

其中, k_1, k_2, \dots, k_r 称为 X 的累量或半不变量, μ_i 指变量 X 的第 i 阶原点矩。累量和矩有如下对应关系:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \mu'_1 = E(X) \\ k_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 = \text{var}(X) \\ k_3 &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 \\ k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (19.2)$$

同时,累量还有如下的简单性质:

- ① 若随机变量 X, Y 独立,则随机变量 $X+Y$ 的第 m 阶累量等于 X 的第 m 阶累量与 Y 的

第 m 阶累量之和。这个性质称为累量的可加性,这正是累量比矩的方便之处。

② 在变换 $Y=X+c$ 下,累量(除一阶外)不变, c 为常数,这也是半不变量得名的由来。

19.1.2 分位点的 Cornish - Fisher 展开

分位点的 Cornish - Fisher 展开由著名统计学家 Cornish 和 Fisher(1960)提出,后来由 Fisher 和 Cornish(1967)进一步完善。Cornish - Fisher 展开方法(简称 CF 展开)是本章要用的基本工具之一。

设 $F(x)$ 是一分布函数,若其第 j 阶累量 k_j 满足 $k_1=0, k_2=1, k_j=O(n^{1-j/2}) (j=3, 4, \dots)$, 并记 $\Phi(x)$ 与 $\phi(x)$ 分别为标准正态分布的分布函数与密度函数,则 $F(x)$ 的 Edgeworth 展开为

$$F(x) = \Phi(x) - \frac{k_3}{6}(x^2 - 1)\phi(x) - \frac{k_4}{24}(x^3 - 3x)\phi(x) - \frac{k_3^2}{72}(x^5 - 10x^3 + 15x)\phi(x) + \dots \quad (19.3)$$

令 x_p 和 u_p 分别为分布函数 $F(x)$ 和 $\Phi(x)$ 的 $p (0 < p < 1)$ 分位点,对 $\Phi(u_p)$ 在 x_p 处作泰勒展开,并利用式(19.3)以及关系 $F(x_p) = \Phi(u_p) = p$,可以得到 x_p 作为 u_p 的函数渐近展开

$$x_p = u_p + \frac{1}{6}(u_p^2 - 1)k_3 + \frac{1}{24}(u_p^3 - 3u_p)k_4 - \frac{1}{36}(2u_p^3 - 5u_p)k_3^2 + \frac{1}{120}(u_p^4 - 6u_p^2 + 3)k_5 - \frac{1}{24}(u_p^4 - 5u_p^2 + 2)k_3k_4 + \dots \quad (19.4)$$

称式(19.4)为 x_p 作为 u_p 的函数的 Cornish - Fisher 展开。

利用式(19.4)作二阶近似,经过简单的整理, x_p 可展成 u_p 的多项式

$$x_p = a_0 + (1 + a_1)u_p + a_2u_p^2 + a_3u_p^3 \quad (19.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{k_3}{6} \\ a_1 &= \frac{-3k_4 + 4a_0^2 + 3a_0^2k_4}{24 + 20a_0^2 + 3k_4 - 3a_0^2k_4} \\ a_2 &= \frac{3a_0[k_4(a_1 + 1)^2 - 4(a_1 - 1)^2 + 12]}{8(24 + 36a_0^2 + 3k_4 - 8a_0k_3 - 3a_0^2k_4)} \\ a_3 &= \frac{(a_1 + 1)[24a_0a_2 - 12a_1^2 + k_4(a_1 + 1)^2 + 6k_4a_0a_2]}{24 + 36a_0^2 + 3k_4 - 8a_0k_3 - 3a_0^2k_4} \end{aligned} \right\} \quad (19.6)$$

这样,当已知随机变量 X 的前四阶累量时,可由式(19.5)计算 X 的 p 分位点 x_p 。根据式(19.5)和式(19.6)可以看出,对一般的随机变量只要前四阶矩已知,其分位数都可以进行 CF 展开,因此前四阶矩也称为 CF 方法的四个特征量。至于 WCF 展开,实际上是带有随机系数的 CF 展开,将在后面具体介绍。

19.1.3 Fiducial 方法

为克服 Bayes 方法中先验选取的主观性, Fisher(1930)提出了“逆概率”方法, 后来被称为 Fiducial 方法。他从似然函数 $L(\theta, x)$ 出发, 认为 $L(\theta, x)$ 可看成某种概率, 即给定 x , $L(\theta, x)$ 可看成样本 x 是由 θ 所标记的总体产生的可能性的度量。基于这一认识, 他定义了参数 θ 的 Fiducial 分布, 这里的介绍不局限于 Fisher 的原始定义, 主要取自 Dawid 和 Stone(1982)的文章。从一定意义上讲, 后者是前者的推广和发展。徐兴忠和李国英(2006)将 Dawid 和 Stone(1982)的工作进一步推广, 通过定义广义枢轴模型给出了信仰模型和信仰分布的概念, 以适应更广泛的分布族, 并对信仰分布的很多性质进行了研究。

定义 19.2 设数据 $X \in \chi$, 参数 $\theta \in \Theta$, 如果存在随机变量 $E \in \varepsilon$, 满足

- ① X 是 θ 与 E 的函数, 记为 $X = h(\theta, E)$;
- ② Q 是完全已知的分布, $E \sim Q$;
- ③ 只有 X 是可观测的;
- ④ θ 完全未知, 需对 θ 进行推断;

则称 $X = h(\theta, E)$ 为函数模型。

设对 $\forall x \in \chi, e \in \varepsilon$, 关于 θ 的方程 $x = h(\theta, e)$ 有唯一解 $\hat{\theta}_x(e)$, 则有如下的定义:

定义 19.3 称 $\hat{\theta}_x(E)$ 分布为 θ 的 Fiducial 分布, 分布函数记为 $H_x(\cdot)$; 设 $g(\theta)$ 为参数函数, 则称 $g(\hat{\theta}_x(E))$ 分布为 $g(\theta)$ 的 Fiducial 分布, 分布函数记为 $H_x^g(\cdot)$ 。

以上 Fiducial 模型的基本思想为: 把数据变量(或统计量) X 表示成参数 θ 和枢轴量 E 的函数 $X = h(\theta, E)$; 当得到观测值 x 后, 认为数据变量(或统计量)固定, 参数具有随机性; 设 e 为 E 的任一实现值, $\hat{\theta}_x(e)$ 为由关系 $x = h(\theta, e)$ 确定的参数的唯一解, 则参数变量的分布由 $\hat{\theta}_x(E)$, $E \sim Q$ 确定; 参数函数 $g(\theta)$ 的分布由 $g(\hat{\theta}_x(E))$, $E \sim Q$ 确定。

确定了参数(参数函数)的分布之后, 就可以根据该分布进行各种统计推断, 如求点估计或置信限: 当观测到 x 后, θ 的置信水平为 γ 的置信下限 $\theta_L(x, \gamma)$ 为 $H_x(\cdot)$ 的 $(1-\gamma)$ 分位数; 点估计 $\hat{\theta}_x$ 可取为 θ 在分布 $H_x(\cdot)$ 下的期望、中位数或众数等。同理可求 $g(\theta)$ 的点估计和置信限。

19.2 系统可靠性综合评估的框架

19.2.1 综合评估的基本模型

复杂系统可靠性综合评估方法是一种特定情形下的数据融合方法, 因为构成复杂系统的

部件与设备的试验信息,从不同侧面反映了整个系统的可靠性信息,所以利用组成部分的试验信息对系统可靠性进行分析的过程也就是数据融合的过程。数据融合过程可以在不同的层次上进行,通常可分为三个层次:像素层数据融合、特征层数据融合和决策层数据融合。从数据融合的观点看,复杂系统可靠性综合评估的 WCF 展开方法是典型的特征层上的数据融合方法。为进行小子样系统可靠性综合评估,充分挖掘和利用组成部分的试验信息和工程信息,这样扩大了信息来源,但组成部分的试验信息和工程信息不具有 consistency,因此很难在一个统一的层次上进行数据融合。而现有的数据融合方法的融合框架基本上是在同一层上的。为此,于丹等(1996,2001)为小子样系统可靠性综合评估方法提供了一个建立在特征层和决策层上的数据融合框架,简称综合框架,从而达到了利用复杂系统组成部分的不同试验信息和工程信息进行可靠性综合评估的目的。下面具体介绍这一综合评估的基本模型。

假设系统 S 由 $M=I+J+K$ 个不同设备 $P_1, P_2, \dots, P_I, Q_1, Q_2, \dots, Q_J, S_1, S_2, \dots, S_K$ 构成,记这 M 个设备的可靠度分别为 $R_1, R_2, \dots, R_I, p_1, p_2, \dots, p_J, r_1, r_2, \dots, r_K$, 系统可靠度函数为

$$R = \psi(R_1, R_2, \dots, R_I, p_1, p_2, \dots, p_J, r_1, r_2, \dots, r_K) \quad (19.7)$$

假定根据这 M 个设备试验数据的具体情况,可将它们分为如下三类:

- ① 对于设备 P_1, P_2, \dots, P_I , 相应的寿命试验数据 Y_1, Y_2, \dots, Y_I 满足 WCF 展开方法的条件;
- ② 对于设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_J , 通过对试验数据的预处理,可以得到这 J 个设备的可靠度 p_1, p_2, \dots, p_J 的置信分布 $H_1(p), H_2(p), \dots, H_J(p)$, 且它们的置信分布满足 CF 展开方法的条件;
- ③ 对于设备 S_1, S_2, \dots, S_K , 通过对试验数据的预处理,可以得到这 K 个设备的可靠度 r_1, r_2, \dots, r_K 的置信分布 $F_1(r), F_2(r), \dots, F_K(r)$ 。

其中, $H_j(p), j=1, 2, \dots, J$ 和 $F_k(r), k=1, 2, \dots, K$ 不含任何未知量。以下总假定 $Y_1, Y_2, \dots, Y_I, p_1, p_2, \dots, p_J, r_1, r_2, \dots, r_K$ 是相互独立的。记 $H=H_1, H_2, \dots, H_J, F=F_1, F_2, \dots, F_K, V=H \cdot F$ 为 $p_1, p_2, \dots, p_J, r_1, r_2, \dots, r_K$ 的联合分布函数, 以下记 $\vec{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_I), \vec{p}=(p_1, p_2, \dots, p_J), \vec{r}=(r_1, r_2, \dots, r_K), \vec{Y}$ 的参数空间为 Θ 。我们的主要目的是研究如何从 \vec{Y} 和 V 出发计算置信下限 $R_L=R_L(\alpha, \vec{Y}, V)$, 使其满足

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_{\theta, V} \{ \psi(R_1, R_2, \dots, R_I, \vec{p}, \vec{r}) \geq R_L(\alpha, \vec{Y}, V) \} \geq 1 - \alpha \quad (19.8)$$

这里 \vec{Y} 和 V 是进行系统可靠性综合的出发点, 其中概率 $P_{\theta, V}$ 指 $(\vec{Y}, \vec{p}, \vec{r})$ 的联合分布。这时称式(19.8)为多种数据来源信息情形下的可靠性综合模型, 满足式(19.8)的 $R_L(\alpha, \vec{Y}, V)$ 作为置信度 $1 - \alpha$ 的系统可靠度置信下限。因此, 核心的问题是如何构造满足式(19.8)的 $R_L(\alpha, \vec{Y}, V)$ 。

由式(19.8)可以看到, 如果系统仅由设备 $Q_1, Q_2, \dots, Q_J, S_1, S_2, \dots, S_K$ 构成, 即 $I=0$, 将 $H=H_1, H_2, \dots, H_J, F=F_1, F_2, \dots, F_M$ 看成是这 $J+K$ 个设备可靠度的后验分布时, 则由式(19.8)定义的系统可靠度下限就是 Bayes 下限; 当 $J=K=0$ 时, 式(19.8)所提供的是频率统计意义下的系统可靠度置信下限。值得注意的是, 这里的可靠性综合模型是开放的、可扩展

的,因此具有广泛的适用性。

19.2.2 系统可靠性评估 CF 方法

假定设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_J 的可靠度 p_1, p_2, \dots, p_J 的置信分布 $H_1(p), H_2(p), \dots, H_J(p)$ 均适合 CF 展开,因此可用其前四阶矩代替置信分布作为系统综合的输入信息,记 $\mu_{j,k} (j=1, 2, \dots, J, k=1, 2, 3, 4)$ 为分布 $H_j(p)$ 的 k 阶原点矩, $\vec{\mu} = (\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{1,3}, \mu_{1,4}, \dots, \mu_{J,1}, \mu_{J,2}, \mu_{J,3}, \mu_{J,4})$, $\phi(p_1, p_2, \dots, p_J)$ 是由 J 种不同的设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_J 构成的单调关联系统 S 的可靠度函数,则它是一个多项式函数。记 $H = H_1(p_1), H_2(p_1), \dots, H_J(p_J)$ 为 p_1, p_2, \dots, p_J 的联合分布函数,那么如何计算

$$P_H\{\phi(p_1, p_2, \dots, p_J) \geq R_L(\alpha, \vec{\mu})\} \geq 1 - \alpha \quad (19.9)$$

的 $R_L(\alpha, \vec{\mu})$ 是核心问题。

系统综合 CF 方法实质上是二阶正态逼近。由于综合的信息实际上是独立随机变量 p_1, p_2, \dots, p_J 的置信分布 $H_1(p), H_2(p), \dots, H_J(p)$, 由于 p_j 的前四阶矩可以较好地刻画其分布特性,因此系统可靠性综合时,利用各部件的前四阶矩计算系统可靠度的前四阶矩,从而得出系统可靠度的置信下限。为计算 $R_L(\alpha, \vec{\mu})$, 按如下三步进行:

① 对于简单的单调关联系统,系统可靠度函数可写成如下形式:

$$\phi(p_1, p_2, \dots, p_J) = \sum_{i=1}^s b_i p_1^{\delta_{i1}} p_2^{\delta_{i2}} \dots p_J^{\delta_{iJ}} \quad (19.10)$$

其中, s 指组成系统的设备个数, b_i 为 1 或 -1, $\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{iJ}$ 为非负整数。例如由两个设备串联构成的系统, $\phi(p_1, p_2) = p_1 p_2$; 当系统由两个设备并联构成时, $\phi(p_1, p_2) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ 。若设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_J 的试验是独立进行的,则 p_1, p_2, \dots, p_J 相互独立,因此 $\phi(p_1, p_2, \dots, p_J)$ 的前四阶矩可由 $H_1(p), H_2(p), \dots, H_J(p)$ 的矩表出。

对于复杂的系统可靠度函数,不宜写成式(19.10)的形式,但对于单调关联系统,其可靠度函数是可导的,可以通过泰勒展开计算。记 $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_J)$, 系统可靠度函数 $\phi(p_1, p_2, \dots, p_J)$ 在 $\vec{\mu}_0 = (\mu_{1,1}, \mu_{2,1}, \dots, \mu_{J,1})$ 处进行泰勒展开,便可得到系统可靠度的近似值,具体可参阅郭奎(2004)的文章。 $\phi(p_1, p_2, \dots, p_J)$ 前四阶矩的计算会用到 $H_j(p)$ 的高阶矩。

② 关于 $H_j(p) (j=1, 2, \dots, J)$ 高阶矩的计算,可使用 19.1.2 小节的方法给出。

③ 由式(19.5)和式(19.6)计算系统可靠度 $\phi(p_1, p_2, \dots, p_J)$ 在置信度为 $1 - \alpha$ 时系统可靠度的置信下限 $R_L(\alpha, \vec{\mu})$ 。

19.2.3 系统可靠性评估 WCF 方法

假设系统 S 是由 I 个不同设备 P_1, P_2, \dots, P_I 构成的,相应的寿命试验数据为 Y_1, Y_2, \dots, Y_I , 记这 I 个设备的可靠度分别为 R_1, R_2, \dots, R_I , 系统可靠度函数为 $R = \phi(R_1, R_2, \dots, R_I)$ 。由于诸部件可靠度 R_1, R_2, \dots, R_I 可表示成寿命分布中所含参数的函数,记 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$

为 R_1, R_2, \dots, R_I 对应的全部参数构成的参数向量, 记 $n_j (j=1, 2, \dots, N)$ 为估计量 $\hat{\theta}_j$ 的渐近变量, 记 $n = \min_j \{n_j\}$, $\alpha_j = n_j/n, j=1, 2, \dots, N$ 。设函数 ψ 已知且足够光滑, 记 $\hat{\psi} = \psi(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_I)$ 。下面列出 $\psi - \hat{\psi}$ 的二阶正态逼近的结果。

假设这 I 个设备是相互独立的, 所有设备的试验数据集合记作 \vec{Y} , 估计量 $\hat{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ 满足如下条件

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\theta}_j - \theta_j) &= \frac{u}{n} + O(n^{-2}) \\ E(\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 &= \frac{v}{n} + O(n^{-2}) \\ E(\hat{\theta}_j - \theta_j)^3 &= \frac{w}{n^2} + O(n^{-3}) \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$

四阶以上累量满足 $k_i = O(n^{1-i}), i \geq 4$, 以上条件简称为二阶正态逼近条件。当估计量满足上述二阶正态逼近条件时, 存在 $H = H(\vec{Y}), G_1 = G_1(\vec{Y})$ 和 $G_3 = G_3(\vec{Y})$, 使得

$$V_n = G_1 n^{-1} + H(\hat{\psi} - \psi) + G_3(\hat{\psi} - \psi)^2 \quad (19.12)$$

满足 $\sqrt{n}V_n \stackrel{d}{\approx} N_{01} + O_p(n^{-1}), N_{01}$ 指标准正态分布随机变量, 因此有

$$P\{\psi - \hat{\psi} \leq x\} = \Phi(-G_1 n^{-1/2} + H n^{1/2} x - G_3 n^{1/2} x^2) + O(n^{-1}) \quad (19.13)$$

下面列出式(19.13)中 H, G_1 和 G_3 的表达式。首先定义几个中间量

$$\left. \begin{aligned} h &= \left(\sum_{i=1}^I \psi_i^2 V_i \right)^{-\frac{1}{2}} \\ A &= H \sum_{i=1}^I \psi_i B_i + \frac{1}{2} H \sum_{i=1}^I \psi_{ii} V_i + \sum_{i=1}^I \psi_i H_i^{(11)} \\ B &= H^3 \sum_{i=1}^I \psi_i^3 W_i + 3H^2 \sum_{i,j=1}^I \psi_i \psi_{ij} \psi_j V_i V_j + \frac{3}{2} H \sum_{i=1}^I \psi_{ii} V_i + 3H \sum_{i=1}^I \psi_i B_i - \\ &\quad 3H^3 \sum_{i=1}^I \psi_i^3 V_i B_i + 3H^2 \sum_{i=1}^I \psi_i^3 H_i^{(13)} - 9H^2 \sum_{i=1}^I \psi_i^3 V_i H_i^{(11)} + 9 \sum_{i=1}^I \psi_i H_i^{(11)} \end{aligned} \right\} \quad (19.14)$$

其中, ψ_i, ψ_{ii} 表示函数 ψ 对相应变元的偏导数, 对不同类型的设备, 式(19.14)中的 $B_i, V_i, W_i, H_i^{(11)}, H_i^{(13)}$ 的表达式有较大区别, 将在 19.3 节详细给出, 它们也被称为 WCF 方法的五个特征量。式(19.14)给出的是 $h = h(\theta), A = A(\theta), B = B(\theta)$, 它们都是参数的函数, 用 $\hat{\theta}$ 代替 θ , 分别得到 $\hat{h} = h(\hat{\theta}), \hat{A} = A(\hat{\theta}), \hat{B} = B(\hat{\theta})$ 。而式(19.14)中的 H, G_1, G_3 分别是 $H = \hat{h}, G_1 = \frac{1}{6} \hat{B} -$

$\frac{3}{2} \hat{A}$ 及 $G_3 = \frac{1}{2} \hat{A} H^2 - \frac{1}{6} \hat{B} H^2$, 以下称

$$P\{\psi - \hat{\psi} \leq x\} \simeq \Phi\left(-G_1 n^{-\frac{1}{2}} + H n^{\frac{1}{2}} x - G_3 n^{\frac{1}{2}} x^2\right) \quad (19.15)$$

为随机变量 $\phi - \hat{\phi}$ 分布的二阶正态逼近。记 u_p 为标准正态分布的 p 分位点, 得到系统可靠度置信下限为

$$\phi_L = \hat{\phi} - u_p H^{-1} n^{-\frac{1}{2}} + (G_3 u_p^2 + G_1 H^2) H^{-3} n^{-1} \quad (19.16)$$

19.3 设备级数据处理方法

19.3.1 成败型设备试验数据的处理方法

对于成败型试验数据的设备, 如果其样本量大于 50, 则该设备参加系统综合评估时, 可以使用 WCF 展开方法, 否则, 采用置信分布作为综合信息。设成败型设备的试验数据为 (n, s) , 即在 n 次试验中成功了 s ($0 < s \leq n$) 次。

1. WCF 展开特征量

易知成败型设备的可靠度 $R = \phi(p) = p$, 记 $q = 1 - p$ 。假定参数 p 对应于第 19.2.3 小节的参数向量 θ 的第 i 个分量 θ_i , 参数 p 的估计量定义为 $\hat{p} = s/n$ 。这时有

$$\left. \begin{aligned} B_i &= 0 \\ V_i &= pq/\alpha_i \\ W_i &= pq(1-2p)/\alpha_i^2 \\ H_i^{(11)} &= H_i pq/\alpha_i \\ H_i^{(13)} &= 3H_i p^2 q^2 / \alpha_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (19.17)$$

其中, $H_i = \frac{1}{2} H^3 \left[\phi_i^2 (1-2p)/\alpha_i + 2 \sum_{j=1}^I \phi_j \phi_{ji} V_i \right]$, $\alpha_i = n_i/n$ (见 19.2.3 小节)。

2. 置信分布

在试验数据 (n, s) 情形下, 由

$$\sum_{k=0}^{n-s} \binom{n}{k} R_L^{n-k} (1-R_L)^k = \int_0^{R_L} \frac{1}{B(s, n-s+1)} x^{s-1} (1-x)^{n-s} dx \quad (19.18)$$

可知, 可靠度 R 的置信分布为贝塔分布 $\beta(s, n-s+1)$ 。

19.3.2 指数型设备试验数据的处理方法

假定指数设备的试验数据为 (T, r) , r 为试验的失效数, T 为总试验时间, 样本量为 n 。

1. WCF 展开特征量

对于单参数指数寿命型设备, 对于给定的任务时间, 记其可用度函数为 $A(\theta)$ (对于不可修系统, 可用度和可靠度一致), 其中 θ 为该设备的平均寿命。假定参数 θ 对应于 19.2.3 小节的参数向量 θ 的第 i 个分量 θ_i , 则有

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{\theta^2}{2} A''(\theta) / \alpha_i \\ V_i &= \theta^2 A'^2(\theta) / \alpha_i \\ W_i &= 2\theta^3 A'^3(\theta) \alpha_i^2 + 9B_i V_i \\ H_i^{(11)} &= \theta^2 A'(\theta) H_i / \alpha_i \\ H_i^{(13)} &= 3\theta^4 A'^3(\theta) H_i / \alpha_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (19.19)$$

其中, $H_i = -H^3 \left\{ \theta \psi_i^2 [A'^2(\theta) + \theta A'(\theta) A''(\theta)] / \alpha_i + \sum_{j=1}^I \psi_j \psi_{ji} V_j \right\}$ 。

2. 置信分布

在上面的试验数据情形下, 利用

$$\int_0^T \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} t^{r-1} e^{-\lambda t} dt = \int_0^\lambda \frac{T^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-Ty} dy \quad (19.20)$$

可知失效率 λ 的置信分布为伽马分布 $\Gamma(r, T)$ 。

至于其他情形下的指数分布与威布尔分布, 比较复杂, 感兴趣的读者可参阅于丹等(2001)的技术报告。

19.4 系统可靠性评估部分 WCF 方法

19.4.1 系统可靠性综合评估部分 WCF(1)方法

设系统 S 是由 $I+K$ 个不同设备 $P_1, P_2, \dots, P_I, S_1, S_2, \dots, S_K$ 组成的, 记这 $I+K$ 个设备的可靠度分别为 $R_1, R_2, \dots, R_I, r_1, r_2, \dots, r_K$, 系统可靠度函数为 $R = \psi(R_1, R_2, \dots, R_I, \vec{r})$, 其中 $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_K)$, \vec{r} 的分布函数为 $F = F_1, F_2, \dots, F_K$, 对于固定的 \vec{r} 及给定的样本 \vec{Y} , 随机变量 $\psi - \hat{\psi}$ 的分布函数的条件二阶正态逼近为

$$P\{\psi - \hat{\psi} \leq x \mid \vec{r}\} = \Phi(-G_1(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{-1/2} + H(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}x - G_3(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}x^2) + O(n^{-1})$$

此时系统可靠度 $\psi(R_1, R_2, \dots, R_I, \vec{r})$ 的置信分布为

$$P\{\psi \leq x \mid \vec{r}\} = \Phi[-G_1(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{-1/2} + H(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}(x + \hat{\psi}) - G_3(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}(x + \hat{\psi})^2] + O(n^{-1})$$

记

$$G(\vec{r}, x) = \Phi[-G_1(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{-1/2} + H(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}(x + \hat{\psi}) - G_3(\vec{Y} \mid \vec{r})n^{1/2}(x + \hat{\psi})^2] \quad (19.21)$$

取 $0 < \alpha < 1$, 利用二分法迭代计算满足方程 $E_F G(\vec{r}, x) = \alpha$ 的解 $x_\alpha = x(\alpha, F, \vec{Y})$, 取 $R_L = x_\alpha$ 作

为置信度 $1-\alpha$ 的系统可靠度置信下限,称上边的算法为部分 WCF(1)方法。上面所提供的部分 WCF(1)方法中算法针对一般的系统可靠性结构,是结合系统可靠性综合结构中的第一类和第三类试验数据信息对可靠性综合模型式(19.8)的具体实现。

上面的算法计算量集中在求解方程 $E_F G(\vec{r}, x) = \alpha$, 因此,根据已有的数据信息对设备进行分类时,凡适合做 WCF 展开的设备,或经过预处理后得到的可靠度置信分布,可用贝塔分布逼近,虚拟出成败型试验数据的设备都应归并到第一部分,以提高综合计算的效率。特别地,可以对系统可靠度函数进行如下形式的分解,即确定非负单调函数 ψ 、非负函数 ψ_1 及 ψ_2 , 以及 r_1, r_2, \dots, r_K 的子集 $r^{(2)}$ 使得

$$\psi = \psi_1(r^{(1)})\psi_2(r^{(2)}, R_1, R_2, \dots, R_I) \quad (19.22)$$

而且 $r^{(1)}$ 中所含变量个数达到最小,其中 $r^{(1)} = \{r_1, r_2, \dots, r_K\} - r^{(2)}$ 。确定了系统可靠度函数的上述分解后,先对 ψ_2 用 WCF 算法进行处理,然后对式(19.22)两边作对数变换,最后求得系统可靠度置信下限。当 $r^{(1)}$ 中所含变量个数较多时,计算时需要的计算机内存较多,因而计算的复杂度增大。为此构造下面的计算方法。

① 记 $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_K)$ 为 r 的均值向量,取系统可靠度 R 的点估计为

$$R_0 = \psi(\hat{R}_1, \hat{R}_2, \dots, \hat{R}_I, \bar{r})$$

② 对于固定的 x ,利用分位点配序抽样法^[13]计算 $G(\vec{r}, x)$ 的期望可得

$$G(x) = E_F G(\vec{r}, x) \quad (19.23)$$

③ 将 $G(x)$ 在 $x = \hat{R}$ 处展开并取前四项可得

$$G(x) \approx A' + B'(x - R_0) + \frac{C'}{2}(x - R_0)^2 + \frac{D'}{6}(x - R_0)^3 \quad (19.24)$$

这里

$$A' = G(R_0), \quad B' = \left. \frac{\partial G(x)}{\partial x} \right|_{x=R_0}, \quad C' = \left. \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x^2} \right|_{x=R_0}, \quad D' = \left. \frac{\partial^3 G(x)}{\partial x^3} \right|_{x=R_0} \quad (19.25)$$

④ 解方程 $G(x) = \alpha$ 可得置信度为 $1-\alpha$ 的系统可靠度置信下限。

下面利用待定系数法给出它的近似解。令

$$x - \hat{R} = \beta_0 + \beta_1(\alpha - A') + \beta_2(\alpha - A')^2 + \beta_3(\alpha - A')^3 \quad (19.26)$$

代入 $G(x) = \alpha$ 可得

$$x = \hat{R} + \beta_1(\alpha - A') + \beta_2(\alpha - A')^2 + \beta_3(\alpha - A')^3 \quad (19.27)$$

这里

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{B'}, \quad \beta_2 = \frac{C'\beta_1^2}{2B'}, \quad \beta_3 = \frac{C'\beta_1\beta_2 + \frac{1}{6}D'\beta_1^3}{\beta'} \quad (19.28)$$

19.4.2 系统可靠性综合评估部分 CF 方法

假设所考虑的系统 S 是由 $M+K$ 个不同设备 $Q_1, Q_2, \dots, Q_M, S_{M+1}, S_{M+2}, \dots, S_{M+K}$ 构成的, 记这 $M+K$ 个设备的可靠度分别为 r_1, r_2, \dots, r_{M+K} , 系统可靠度函数为 $R = \phi(r_1, r_2, \dots, r_{M+K})$ 。假定根据这 $M+K$ 个设备的具体试验数据, 进行设备试验数据预处理, 可以得到这 $M+K$ 个设备可靠度 r_1, r_2, \dots, r_{M+K} 的置信分布, 记为 $F_1(r), F_2(r), \dots, F_{M+K}(r)$, 其中不含任何未知量。这里根据设备可靠度置信分布是否适合进行 CF 展开, 将这 $M+K$ 个置信分布分为两类: 假定设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_M 对应的置信分布 F_1, F_2, \dots, F_M 满足 CF 展开的条件; 而 F_{M+1}, \dots, F_{M+K} 不适合进行 CF 展开。记 $F = F_1, F_2, \dots, F_{M+K}$ 为 $r = (r_1, r_2, \dots, r_{M+K})$ 的联合分布函数, $F^* = F_{M+1}, \dots, F_{M+K}$ 为 r_{M+1}, \dots, r_{M+K} 的联合分布函数, $\mu_{j,k}$ ($j = 1, 2, \dots, M; k = 1, 2, 3, 4$) 为分布 $F_j(r)$, $j = 1, 2, \dots, M$ 的 k 阶原点矩, $\mu = (\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{1,3}, \mu_{1,4}, \dots, \mu_{M,1}, \mu_{M,2}, \mu_{M,3}, \mu_{M,4})$, 如何计算满足

$$P_F\{\phi(r_1, r_2, \dots, r_{M+K}) \geq R_L(\alpha, \vec{\mu}, F^*)\} \geq 1 - \alpha \quad (19.29)$$

的 $R_L(\alpha, \vec{\mu}, F^*)$ 是所关心的主要问题。

基本做法: 先固定 r_{M+1}, \dots, r_{M+K} , 对设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_M , 基于相应的置信分布, 采用 CF 展开方法求 $R = \phi(r_1, r_2, \dots, r_{M+K})$ 的近似条件分布, 得到

$$P\{\phi(r_1, \dots, r_M, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) \leq x \mid r_{M+1}, \dots, r_{M+K}\} = W(x, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) \quad (19.30)$$

利用 $r_j \sim F_j$ ($j = M+1, \dots, M+K$), 求 $R_L = R_L(\alpha, \mu, F^*)$ 满足

$$E_{F_{M+1}, \dots, F_{M+K}} W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) = \alpha$$

为了求出 $R_L = R_L(\alpha, \vec{\mu}, F^*)$, 可按如下三步进行:

① 对给定的 r_{M+1}, \dots, r_{M+K} , 求 $R = \phi(r_1, \dots, r_M, r_{M+1}, \dots, r_{M+K})$ 作为 r_1, r_2, \dots, r_M 的函数的前四阶矩及累量, 称为条件矩和条件累量。

② 对给定的 r_{M+1}, \dots, r_{M+K} , 求条件分布

$$W(x, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) = P\{\phi(r_1, \dots, r_M, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) \leq x \mid r_{M+1}, \dots, r_{M+K}\}$$

③ 求 $E_{F_{M+1}, \dots, F_{M+K}} W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) = \alpha$ 的数值解 R_L 。

如上所述, 对给定的 r_{M+1}, \dots, r_{M+K} , 对每个 x 都可求得 $W(x, r_{M+1}, \dots, r_{M+K})$ 的值。

$$E_{F_{M+1}, \dots, F_{M+K}} W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) dF_{M+1}(r_{M+1}) \dots dF_{M+K}(r_{M+K})$$

由于 $W(x, r_{M+1}, \dots, r_{M+K})$ 是 x 的单调增函数, 所以 $E_{F_{M+1}, \dots, F_{M+K}} W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K})$ 也是 x 的单调增函数, 因此由二分法可求得 R_L 。

综上所述, 可求得 $E_{F_{M+1}, \dots, F_{M+K}} W(R_L, r_{M+1}, \dots, r_{M+K}) = \alpha$ 的数值解 R_L , 即置信度为 $1 - \alpha$ 的系统可靠度置信下限为 R_L 。

19.4.3 系统可靠性综合评估部分 WCF(2)方法

系统可靠性综合评估部分 WCF(2)方法继承了系统可靠性综合评估部分 WCF(1)方法。

当组成系统的设备试验数据不适合用 WCF 方法处理时,可用其他方法进行预处理得到可靠度的置信分布,如果可靠度置信分布信息能用其前四阶矩表达,即适合进行 CF 展开,则进行系统可靠性综合时,综合的输入信息可用 WCF 方法处理得到的五个特征量和 CF 方法处理得到的四个特征量,具体的可靠性综合模型如下所述。

设系统由 $I+J$ 个不同设备 $P_1, P_2, \dots, P_I, Q_1, Q_2, \dots, Q_J$ 组成,记设备 P_1, P_2, \dots, P_I 的可靠度分别为 R_1, R_2, \dots, R_I ,设备 Q_1, Q_2, \dots, Q_J 的可靠度 p_1, p_2, \dots, p_J 的置信分布 $H_1(p), H_2(p), \dots, H_J(p)$ 均适合 CF 展开,因此其前四阶矩代替置信分布作为系统综合的输入信息,记 $\mu_{j,k} (j=1,2,\dots,J, k=1,2,3,4)$ 为分布 $H_j(p)$ 的 k 阶原点矩, $\vec{\mu} = (\mu_{1,1}, \mu_{1,2}, \mu_{1,3}, \mu_{1,4}, \dots, \mu_{J,1}, \mu_{J,2}, \mu_{J,3}, \mu_{J,4})$ 。假定 $Y_1, Y_2, \dots, Y_I, p_1, p_2, \dots, p_J$ 是相互独立的, Y 的参数空间为 Θ 。设系统可靠度函数为 $R = \phi(R_1, \dots, R_I, \vec{p})$, 其中 $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_J)$, 且 \vec{p} 的分布函数为 $H = H_1, H_2, \dots, H_J$ 。如何计算满足

$$\inf_{\theta \in \Theta} P_{H,\theta} \{R(R_1, \dots, R_I, \vec{p}) \geq R_L(\alpha, \vec{Y}, \vec{\mu})\} \geq 1 - \alpha \quad (19.31)$$

的 $R_L(\alpha, \vec{Y}, \vec{\mu})$ 是所关心的主要问题,同时称式(19.31)为系统可靠性综合部分 WCF(2)方法的模型。下面给出计算 $R_L(\alpha, \vec{Y}, \vec{\mu})$ 的步骤:

记系统可靠度函数为 $R = \phi_p(R_1, \dots, R_I) = \phi(R_1, \dots, R_I, p_1, \dots, p_J)$, 对固定的 \vec{p} 及给定的样本 \vec{Y} , 系统可靠度 $\phi_p(R_1, \dots, R_I)$ 的 Fiducial 分布为

$$G(x, \vec{p}) = P\{\phi_p \leq x\} = \Phi \left[-G_1(\vec{Y} | \vec{p}) n^{-\frac{1}{2}} + H(\vec{Y} | \vec{p}) n^{\frac{1}{2}} (x - \hat{\phi}_p) - G_3(\vec{Y} | \vec{p}) n^{\frac{1}{2}} (x - \hat{\phi}_p)^2 \right] \quad (19.32)$$

令 $G(x, \vec{p})$ 在 $x = \hat{R}$ 处展开可得

$$G(x, \vec{p}) = G(\hat{R}, \vec{p}) + \frac{\partial G(x, \vec{p})}{\partial x} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G(x, \vec{p})}{\partial x^2} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R})^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G(x, \vec{p})}{\partial x^3} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R})^3 \quad (19.33)$$

对上式变量 $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_J)$, 求期望

$$\begin{aligned} G(x) = E_H G(x; \vec{p}) &= \int \dots \int G(x; \vec{p}) dH_1 \dots dH_J = \\ &E_H G(\hat{R}, \vec{p}) + E_H \frac{\partial G(x, \vec{p})}{\partial x} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R}) + \\ &\frac{1}{2} E_H \frac{\partial^2 G(x, \vec{p})}{\partial x^2} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R})^2 + \\ &\frac{1}{6} E_H \frac{\partial^3 G(x, \vec{p})}{\partial x^3} \Big|_{x=\hat{R}} (x - \hat{R})^3 \end{aligned} \quad (19.34)$$

记 $G_l(\vec{p}) = \frac{\partial^l G(x, \vec{p})}{\partial x^l} \Big|_{x=\hat{R}} (l=0, 1, 2, 3)$, 则

$$\begin{aligned}
E_H G_l(\vec{p}) = & G_l(\vec{p}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^J \frac{\partial^2 G_l(\vec{p})}{\partial p_i^2} \Big|_{\vec{p}=\bar{\vec{p}}} E(p_i - \bar{p}_i)^2 + \\
& \frac{1}{6} \sum_{i=1}^J \frac{\partial^3 G_l(\vec{p})}{\partial p_i^3} \Big|_{\vec{p}=\bar{\vec{p}}} E(p_i - \bar{p}_i)^3 + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^J \frac{\partial^4 G_l(\vec{p})}{\partial p_i^4} \Big|_{\vec{p}=\bar{\vec{p}}} E(p_i - \bar{p}_i)^4 + \\
& \frac{1}{4} \sum_{i=1}^J \sum_{j=i+1}^J \frac{\partial^4 G_l(\vec{p})}{\partial p_i^2 \partial p_j^2} \Big|_{\vec{p}=\bar{\vec{p}}} E(p_i - \bar{p}_i)^2 E(p_j - \bar{p}_j)^2
\end{aligned} \quad (19.35)$$

其中 $\bar{p}_j (j=1, 2, \dots, J)$ 为设备 Q_3 的可靠度 p_j 的均值, 而 $\bar{\vec{p}} = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_J)$ 。记

$$\left. \begin{aligned}
A &= E_H G(\hat{R}, \vec{p}) \\
B &= E_H \frac{\partial G(x, \vec{p})}{\partial x} \Big|_{x=\hat{R}} \\
C &= E_H \frac{\partial^2 G(x, \vec{p})}{\partial x^2} \Big|_{x=\hat{R}} \\
D &= E_H \frac{\partial^3 G(x, \vec{p})}{\partial x^3} \Big|_{x=\hat{R}}
\end{aligned} \right\} \quad (19.36)$$

式(19.34)简化为

$$G(x) = A + B(x - \hat{R}) + \frac{1}{2}C(x - \hat{R})^2 + \frac{1}{6}D(x - \hat{R})^3 \quad (19.37)$$

解方程

$$A + B(x - \hat{R}) + \frac{1}{2}C(x - \hat{R})^2 + \frac{1}{6}D(x - \hat{R})^3 = \alpha \quad (19.38)$$

可得置信度为 $1-\alpha$ 的系统可靠度置信下限。

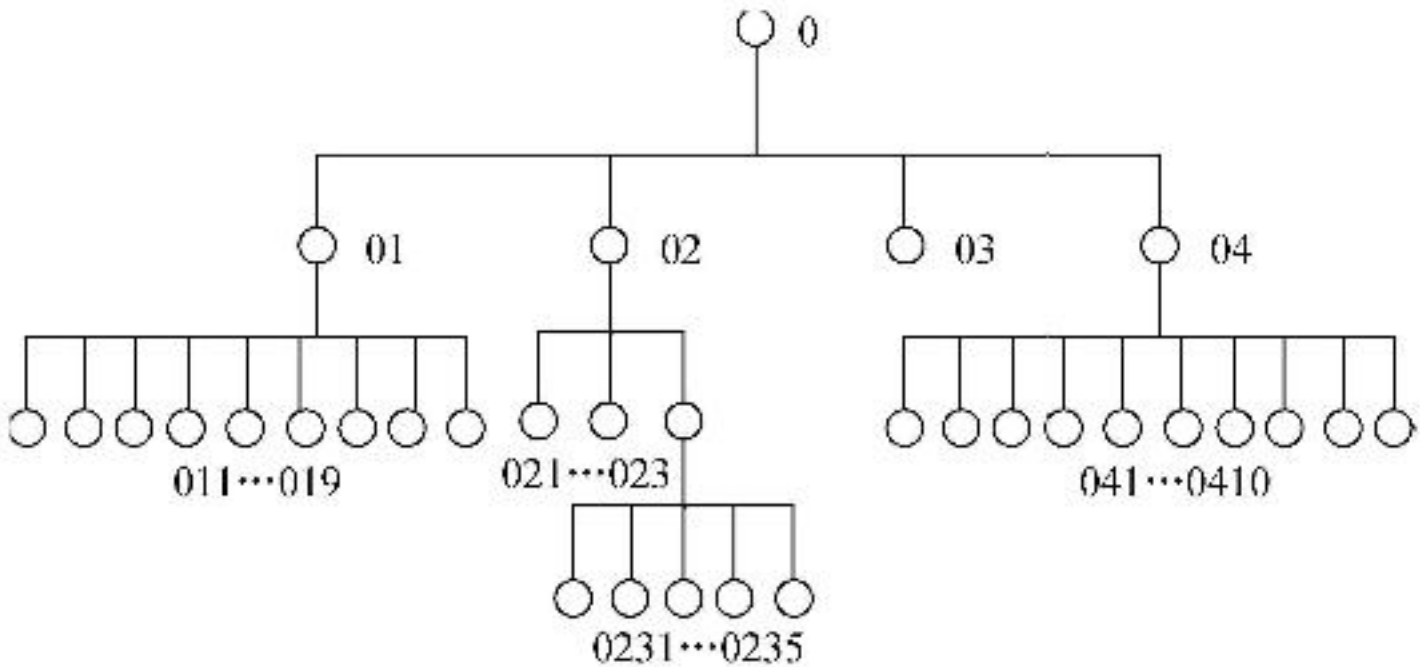
习 题

19.1 某系统(编号为 0)由 4 个分系统组成, 编号分别为 01, 02, 03, 04, 分系统 01 由 9 个设备(011, 012, ..., 019)组成, 分系统 02 由两个设备(021, 022)和一个子系统(023)组成, 子系统 023 由 5 个设备(0231, 0232, ..., 0235)组成, 分系统 04 由 10 个设备(041, 042, ..., 0410)组成, 该系统的可靠性树形结构如题图 19.1 所示, 具体数据见题表 19.1。计算在置信度 0.8 下系统可靠度的置信下限。

19.2 某系统由 13 个设备(001, 002, ..., 013)串联组成, 设备试验数据见题表 19.2。试计算在置信度 0.8 下系统可靠度的置信下限。

题表 19.1 某系统试验数据表

编 号	数据类型	(n,r)	(T,r)	编 号	数据类型	(n,r)	(T,r)
01	指数型		$(5\ 864,0)$	0233	指数型		$(22\ 080,0)$
011	指数型		$(20\ 700,0)$	0234	成败型	$(489\ 360,0)$	
012	成败型	$(419,1)$		0235	成败型	$(41\ 000,0)$	
013	指数型		$(20\ 700,0)$	03	指数型		$(10\ 048,0)$
014	指数型		$(20\ 700,0)$	04	指数型		$(960,0)$
015	指数型		$(25\ 981,0)$	041	指数型		$(41\ 400,0)$
016	指数型		$(91\ 164,0)$	042	指数型		$(1\ 260,0)$
017	指数型		$(91\ 164,0)$	043	指数型		$(7\ 800,0)$
018	指数型		$(91\ 164,0)$	044	指数型		$(126,0)$
019	指数型		$(25\ 981,0)$	045	指数型		$(1\ 260,0)$
021	指数型		$(350,0)$	046	指数型		$(7\ 200,0)$
022	指数型		$(107\ 268,0)$	047	指数型		$(1\ 260,0)$
023	成败型	$(10\ 000,97)$		048	指数型		$(101\ 303,0)$
0231	成败型	$(1\ 000,0)$		049	指数型		$(182\ 419,0)$
0232	指数型		$(225\ 000,0)$	0410	指数型		$(182\ 419,0)$



题图 19.1 系统树形结构图

题表 19.2 设备试验数据表

编 号	数据类型	(n,r)	(T,r)	编 号	数据类型	(n,r)	(T,r)
001	指数型		$(623,4)$	008	指数型		$(953.5,0)$
002	指数型		$(653,2)$	009	指数型		$(1\ 008,2)$
003	指数型		$(692,4)$	010	指数型		$(1\ 163.5,1)$
004	指数型		$(846.5,6)$	011	指数型		$(1\ 251,1)$
005	指数型		$(546.5,1)$	012	成败型	$(1\ 557,3)$	
006	指数型		$(617.5,0)$	013	成败型	$(1\ 213,3)$	
007	指数型		$(759,2)$				

附录 A 统计学的基本知识

A.1 样本及其统计量

A.1.1 总体、样本、简单随机样本

在统计学中,总体与样本是两个重要概念。通常把研究对象的全体称为总体(或母体),而把组成总体的基本单元称为个体(样品或样本点)。例如,要研究某产品的故障发生时间,则所有这种型号产品的故障发生时间就是一个总体。它是一个随机变量 X ,而其中每一件产品的故障发生时间就是一个个体。因此,如果表征总体的随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,则通常称总体 $F(x)$ 。

显然,从进行统计分析的目的来说,重要的是获取总体的性质或者总体的分布。由于总体的性质由每一个个体所确定,但不可能将总体中的每一个个体加以研究,因此必须对总体进行抽样观测。一个抽样观测,就是做一个随机试验,并记录其试验结果。如果进行 n 次抽样观测,就得到总体 X 的一组观测值 (x_1, x_2, \dots, x_n) ,其中 x_i 是第 i 次抽样观测的结果。如果总体中每个个体被抽到的机会均等,并且在抽取一个个体后总体的性质和组成不变,那么,抽得的个体就能很好地反映总体的性质。符合这种原则的抽样方法称为简单随机抽样。

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,若 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $F(x)$ 的相互独立的随机变量,则称 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为来自总体 X 的样本量为 n 的简单随机样本,简称样本(或子样),它们的一组观测值 (x_1, x_2, \dots, x_n) 称为来自总体 X 的一组样本观测值。

若 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自总体 X 的简单随机样本,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合分布函数为

$$F^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i) \quad (1)$$

若 X 具有概率密度函数 $f(x)$,则 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的联合概率密度函数为

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) \quad (2)$$

A.1.2 统计量和样本矩

样本是总体性质的反映,但要想由一组样本观测值来推断总体的性质,还必须对所抽取的

样本进行“加工”和“提炼”，将样本构造成某种函数，而该函数反映总体的某种性质就体现了这种“加工”和“提炼”的过程。这种函数被称为统计量，具体定义如下：

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为总体 X 的一个样本， $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为一连续函数，如果 g 中不包括任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为一个统计量。

样本矩是最常用的统计量。例如：

样本均值
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

样本方差
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

样本 k 阶原点矩

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

样本 k 阶中心矩

$$M'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

A.1.3 顺序统计量

设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是从总体 X 中随机抽取的一个样本， (x_1, x_2, \dots, x_n) 为样本的一组观测值，将观测值的各个分量从小到大重新排列为

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

当 (X_1, X_2, \dots, X_n) 取值为 (x_1, x_2, \dots, x_n) 时，定义 $X_{(k)}$ 取值为 $x_{(k)}$ ，称由此得到的 $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ 为 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的一组顺序统计量（也称次序统计量）。显然， $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ ，则 $X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 。

由于产品故障或寿命数据的时间性特点，因此，在可靠性数据分析中，顺序统计量是一种非常重要的统计量。

A.2 点估计

数理统计的中心内容是根据抽取的样本对总体的某种特征作出合理的统计推断，统计推断包括估计理论和假设检验，在估计理论中最基本的是参数估计。所谓参数估计，就是从样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 出发，构造某些统计量 $\theta_j(X_1, X_2, \dots, X_n) (j=1, 2, \dots, k)$ ，对总体 X 的某些未知参数（或数字特征） θ_j 进行估计。这些统计量称为估计量。

用来估计未知参数 θ 的统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为参数 θ 的点估计。点估计的目的是通过样本观测值对未知参数给出接近真值的一个估计值，根据不同试验样本的观测值得到

的点估计不同,不同方法给出的点估计也不同。

常用的点估计有:矩估计、极大似然估计、最小二乘法估计、图估计等,它们在可靠性数据分析中有广泛的应用;同时,针对可靠性数据的特点,还发展了最优线性无偏估计、简单线性无偏估计等其他点估计。根据不同的试验样本和不同的寿命分布,可选取不同的估计方法,不同的方法各有优劣,如矩法可适应任何一个总体,不要求已知分布类型,但精度较差,且不适合于截尾子样。因此,在选取估计方法时,应注意这些问题。

A.2.1 矩估计

在待估参数中,往往有一些是总体 X 的原点矩或中心矩的函数,例如,数学期望是一阶原点矩,方差是二阶中心矩等。因此遇到这类可用总体的矩函数表示的待估参数时,自然就会想到用样本的相应矩函数去估计。例如,用样本均值估计总体均值,用样本方差估计总体方差:

$$\hat{E}(X) = \bar{x} \quad \text{与} \quad \hat{\text{var}}(X) = s^2$$

这种估计方法,称为矩估计。从理论上可证明,当样本量 n 无限增大时,样本矩与相应的总体矩任意接近的概率趋近于 1。

A.2.2 极大似然估计

极大似然估计 MLE(Maximum Likelihood Estimation),是一种重要的估计方法。它的基本思想是:由于样本来自于总体,因此样本在一定程度上能够反映总体的特征。如果在一次试验中得到了样本的观测值 (x_1, x_2, \dots, x_n) ,那么可以说,既然在一次试验中就发生了这个事件,这个事件发生的概率应该很大,因此,如果总体的待估参数为 θ ,在 θ 的一切可能值中,选取一个使样本观测值结果出现的概率达到最大的值作为 θ 的估计值,记为 $\hat{\theta}$,这就是极大似然估计。

根据上述思想,设总体的分布密度函数为 $f(x, \theta)$,其中 θ 为待估参数,从总体中得到的一组样本,其观测值为 (x_1, x_2, \dots, x_n) ,抽样得到这组观测值的概率为 $\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) dx_i$,让其概率达到最大,从而求得 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ 。为方便起见,称

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (3)$$

为 θ 的似然函数。对其求极大值,得到参数 θ 的估计值。有时也采用似然函数的对数 $\ln L(\theta)$,称为 θ 的对数似然。由于对数变换是严格单调的,所以 $L(\theta)$ 和 $\ln L(\theta)$ 在寻求极大值时是等价的。在极大似然估计存在时,经常通过求解下述的似然方程得到估计值 $\hat{\theta}$

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

A.2.3 图估计

多数分布函数在直角坐标系中描绘出来都是一些曲线,但是有些可利用一些变换将其线性化,经过相应的坐标变换,这些曲线在新坐标系中就变成了一条直线。按分布函数的特点,经过相应变换构成新的坐标,印有这种新坐标的专用纸,称为概率纸。因此,它是一种具有特殊刻度的坐标纸。

将各种观测数据在相应的概率纸上描点作图,配出一条直线,然后利用所配的直线检验数据的分布类型和估计分布参数。这种利用作图来估计参数的方法称为图估法。

A.2.4 最小二乘估计

最小二乘法是点估计的一种方法,它主要用来估计线性函数(通常称为线性回归)的未知参数。由最小二乘法求得的参数估计称为最小二乘估计。

直观上,设在 $x-y$ 坐标系中, n 个数据的观测值为 $\{x_i, y_i\} (i=1, 2, \dots, n)$, 要求配出一条直线(常称为回归直线)

$$y = a + bx \quad (5)$$

使得该直线与各点 $\{x_i, y_i\} (i=1, 2, \dots, n)$ 的偏差平方和最小,这就是最小二乘的基本思想。

回归直线式(5)与各观测值的垂直偏差记为

$$\delta_i = y_i - y(x_i) = y_i - (a + bx_i)$$

以 E 代表垂直偏差平方和,用数学公式可表示为

$$E = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (6)$$

因此,能够代表 x 与 y 线性关系的回归直线,是所有直线中使 E 达到最小的那一条,也就是方程 $y = a + bx$ 中系数 a 和 b 使 E 达最小值的那个方程所对应的直线。要使 E 达到最小值,对式(6)关于 a, b 分别求偏导,并令其等于 0,即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{aligned} \right\}$$

解上述方程组,得

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (7)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x} \quad (8)$$

其中, $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n, \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i/n$, 而 a, b 称为回归系数。

对于任何一组数据, 尽管有时数据点零零落落, 直观上看不出 x 与 y 有什么线性关系, 但用式(7)和式(8)总可以算出 \hat{a}, \hat{b} , 从而配出一条回归直线 $y = \hat{a} + \hat{b}x$ 。因此, 需要检查所配的直线有没有实际意义, 即检查 $\{x_i, y_i\} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性相关程度。这种线性相关程度可以用相关系数来描述, 其定义如下:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \tag{9}$$

$|r|$ 的取值在 $0 \sim 1$ 之间, $|r|$ 越接近于 0, 则回归的效果越差, x 与 y 之间的线性相关性就越不显著; $|r|$ 越接近于 1, 回归的效果就越好, x 与 y 之间的线性相关性就越显著。因此, 对 r 进行检验可以判断线性相关性是否显著。关于 r 检验的临界值 r_α 如附表 A.1 所列。当 $|r| > r_\alpha$ 时, 则认为回归效果显著; 否则, 认为回归效果不显著。 α 为显著性水平。

附表 A.1 相关系数临界值表(其中 $P(|r| > r_\alpha) = \alpha$)

$\alpha \backslash n$	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.987 69	0.996 92	0.999 507	0.999 877	0.999 998 8
2	0.900 00	0.950 00	0.980 00	0.990 00	0.999 00
3	0.805 4	0.878 3	0.934 33	0.958 73	0.991 16
4	0.729 3	0.811 4	0.882 2	0.917 20	0.974 06
5	0.669 4	0.754 5	0.832 9	0.874 5	0.950 74
6	0.621 5	0.706 7	0.788 7	0.834 3	0.924 93
7	0.582 2	0.666 4	0.749 8	0.797 7	0.898 2
8	0.549 4	0.631 9	0.715 5	0.764 6	0.872 1
9	0.521 4	0.602 1	0.685 1	0.734 8	0.847 1
10	0.497 3	0.576 0	0.658 1	0.707 9	0.823 3
11	0.476 2	0.552 9	0.633 9	0.683 5	0.801 0
12	0.457 5	0.532 4	0.612 0	0.661 4	0.780 0
13	0.440 9	0.513 9	0.592 3	0.641 1	0.760 3
14	0.425 9	0.497 3	0.574 2	0.622 6	0.742 0
15	0.412 4	0.482 1	0.557 7	0.605 5	0.724 6
16	0.400 0	0.468 3	0.542 5	0.589 7	0.708 4
17	0.388 7	0.455 5	0.528 5	0.575 1	0.693 2
18	0.378 3	0.443 8	0.515 5	0.561 4	0.678 7
19	0.368 7	0.432 9	0.503 4	0.548 7	0.665 2

$\alpha \backslash n$	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
20	0.359 8	0.422 7	0.492 1	0.536 8	0.652 4
25	0.323 3	0.380 9	0.445 1	0.486 9	0.597 4
30	0.296 0	0.349 4	0.409 3	0.448 7	0.554 1
35	0.274 6	0.324 6	0.381 0	0.418 2	0.518 9
40	0.257 3	0.304 4	0.357 8	0.393 2	0.489 6
45	0.242 8	0.287 5	0.338 4	0.372 1	0.464 8
50	0.230 6	0.273 2	0.321 8	0.354 1	0.443 3
60	0.210 8	0.250 0	0.294 8	0.324 8	0.407 8
70	0.195 4	0.231 9	0.273 7	0.301 7	0.379 9
80	0.182 9	0.217 2	0.256 5	0.283 0	0.356 8
90	0.172 6	0.205 0	0.242 2	0.267 3	0.337 5
100	0.163 8	0.194 6	0.230 1	0.254 0	0.321 1

通常不属于线性关系的情况很多,此时可通过必要的变量转换,进行线性化处理,然后利用上述方法处理。以上所讲的是两变量之间存在线性关系的最小二乘估计。为便于推广应用,下面介绍最小二乘估计的矩阵形式。考虑高斯-马尔可夫模型:

$$E(Y) = X\beta, \quad \text{var}(Y) = \sigma^2 I_n \quad (10)$$

其中, Y 为 $n \times 1$ 维观测向量, X 为已知的 $n \times p$ ($p \leq n$) 阶设计矩阵, β 为 $p \times 1$ 维未知参数, σ^2 未知, I_n 为 n 阶单位阵, 该模型称为独立观测线性模型或高斯-马尔可夫模型, 通常记为 $(Y, X\beta, \sigma^2 I_n)$ 。在 $(Y, X\beta, \sigma^2 I_n)$ 中, 如果

$$(Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta}) = \min_{\beta} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \quad (11)$$

则称 $\hat{\beta}$ 为 β 的最小二乘估计, 简称 LSE。

记 $Q(\beta) = (Y - X\beta)^T (Y - X\beta)$, 求 LSE 等价于求 $Q(\beta)$ 的最小值。由矩阵求导, 得

$$\frac{\partial Y^T X \beta}{\partial \beta} = X^T Y, \quad \frac{\partial \beta^T X^T X \beta}{\partial \beta} = 2X^T X \beta$$

然后, 由

$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta} = -2X^T Y + 2X^T X \beta = 0$$

得到 β 的最小二乘估计

$$\hat{\beta}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (12)$$

定理 1 ① 若 $E(Y) = X\beta$, 则式(12)给出的最小二乘估计 $\hat{\beta}_{LS}$ 是 β 的无偏估计。

② 若 $E(Y) = X\beta$, $\text{var}(Y) = \sigma^2 I_n$, X 为列满秩矩阵, 则式(12)给出的最小二乘估计 β_{LS} 的方差为 $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$ 。

A.3 估计量的特征及评价标准

A.3.1 无偏估计

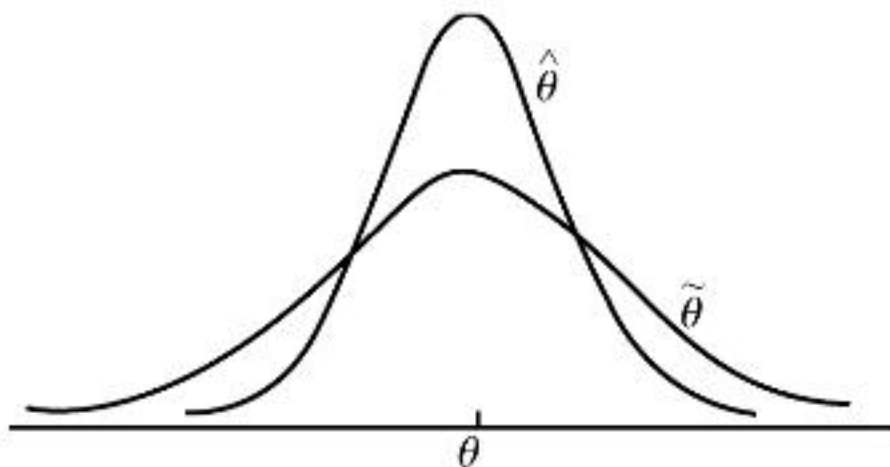
估计未知参数 θ 的估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本的函数, 它随着样本观测值的不同而不同, 希望估计值在真值的附近, 不希望它带有某种倾向性的偏差, 这是无偏性的概念, 其定义如下:

设 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量, 若满足

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (13)$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量, 否则称为有偏估计量。当满足无偏性要求时进行多次重复抽样, 用 $\hat{\theta}$ 来估计 θ 就不会有系统误差。

无偏性是对估计量的一个重要而最常见的要求, 在许多情况下是合理的、必要的。然而, θ 的无偏估计量可以有很多, 而且有些有明显的弊病。如附图 A.1 所示, $\hat{\theta}$ 和 $\tilde{\theta}$ 的期望都是 θ , 但它们的方差却不同, 图中 $\hat{\theta}$ 的分布比 $\tilde{\theta}$ 的分布更集中, 这说明由 $\hat{\theta}$ 给出的估计量更接近于 θ , $\hat{\theta}$ 比 $\tilde{\theta}$ 精确, 于是, 在无偏性的基础上, 经常加上对方差的要求, 估计量的方差越小, 则该估计量的取值就越密集在待估参数附近。



附图 A.1 无偏估计的方差比较

A.3.2 最小方差无偏估计

如果在 θ 的所有无偏估计量 $\hat{\theta}$ 中, 存在一个方差最小的估计量 $\hat{\theta}$, 即对 $\hat{\theta}$ 的任一无偏估计 $\tilde{\theta}$, 有

$$\text{var}(\hat{\theta}) \leq \text{var}(\tilde{\theta}) \quad (14)$$

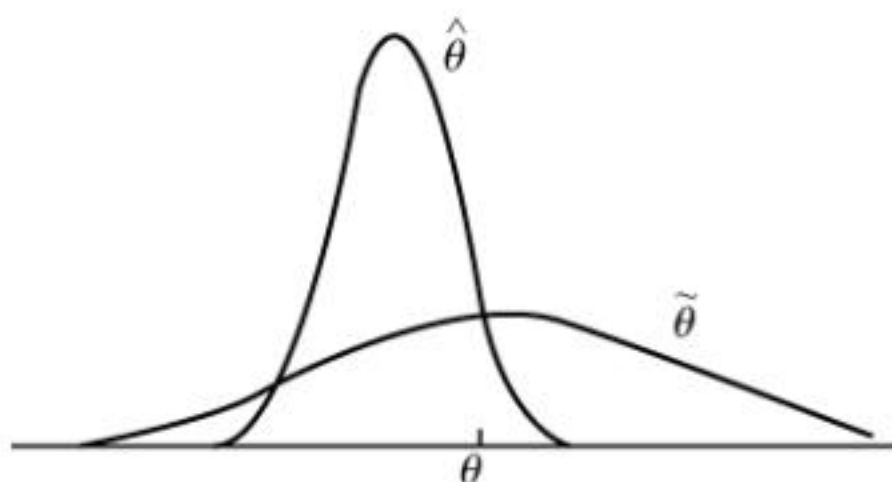
则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最小方差无偏估计。

A.3.3 最小均方误差估计

在有些情况下,无偏性的要求对于参数估计来讲,也不一定是最好的。如附图 A.2 所示,虽然 $E(\hat{\theta})=\theta, E(\tilde{\theta})\neq\theta$,但 $\hat{\theta}$ 却很集中,且数值靠近 θ ,而 $\tilde{\theta}$ 的大部分都很远,所以提出另一种评价准则。将 $E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$ 称为均方误差,记为 MSE,如果它的值能达到最小,即对任何 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 都有

$$E[(\hat{\theta}-\theta)^2] \leq E[(\tilde{\theta}-\theta)^2] \quad (15)$$

那么称估计量 $\hat{\theta}$ 为最小均方误差估计。



附图 A.2 有偏估计与无偏估计的均方误差比较

A.3.4 相合估计

当样本量增大时,要求估计量 $\hat{\theta}$ 趋近于真值 θ 。用概率的说法就是,对于任意小的正数 ϵ ,参数的估计量 $\hat{\theta}$ 依概率收敛于总体参数的真值 θ ,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1 \quad (16)$$

那么称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计。通常,矩估计和极大似然估计具有相合性。

A.3.5 最优线性无偏估计

若估计量是观测值的线性函数,则称之为线性估计。设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的线性无偏估计,如果对任一线性无偏估计 θ^* ,有

$$\text{var}(\hat{\theta}) \leq \text{var}(\theta^*)$$

则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最优线性无偏估计 BLUE(Best Linear Unbiased Estimate)。

定理 2 设 $E(Y)=X\beta, \text{var}(Y)=\sigma^2 I_n$, X 为列满秩矩阵,则最小二乘估计 $\hat{\beta}_{LS}$ 是 β 的唯一最优线性无偏估计。

定理 3 在定理 2 的条件下,则对任一 $\alpha \in R^p, \alpha^T \hat{\beta}_{LS}$ 是 $\alpha^T \beta$ 的唯一最优线性无偏估计。

A.3.6 加权最小二乘估计

在 $(Y, X\beta, \sigma^2 I_n)$ 中, 如果将条件 $\text{var}(Y) = \sigma^2 I_n$ 改为 $\text{var}(Y) = \sigma^2 G$, G 为已知正定阵, 则形成所谓的广义高斯-马尔可夫模型。对该模型, 因为 $G > 0$, 则存在 n 阶非奇异对称阵 B , 使得 $G = B^2$ 。令 $\tilde{Y} = B^{-1}Y$, $\tilde{X} = B^{-1}X$, 则

$$E\tilde{Y} = B^{-1}EY = B^{-1}X\beta = \tilde{X}\beta$$

$$\text{var}(\tilde{Y}) = B^{-1}\text{var}(Y)B^{-1} = \sigma^2 I_n$$

由此, $(\tilde{Y}, \tilde{X}\beta, \sigma^2 I_n)$ 是一个高斯-马尔可夫模型, 容易得到 β 的最小二乘估计

$$\hat{\beta}_{\text{WLS}} = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{Y} = (X^T G^{-1} X)^{-1} X^T G^{-1} Y \quad (17)$$

称之为 β 的加权最小二乘估计, 它也是 β 的最优线性无偏估计。

加权最小二乘估计应用很广, 尤其对截尾样本情形。

考虑一类常用的位置——刻度分布族, 其分布函数形式为 $F((y-\mu)/\sigma)$, 密度函数形式为 $\frac{1}{\sigma}f((y-\mu)/\sigma)$, 其中 $\mu (-\infty < \mu < \infty)$ 称为位置参数, $\sigma > 0$ 称为刻度(尺度)参数。设 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 是来自于 $F((y-\mu)/\sigma)$ 的一个样本, $F(\cdot)$ 为已知的分布函数且二阶矩存在, 要估计 μ 和 $\sigma (\sigma > 0)$ 。这里考虑一类估计, 它们是顺序统计量的线性函数。

设 $Y_{(1)} \leq \dots \leq Y_{(r)}$ 为观测值的前 r 个顺序统计量。令 $X_{(i)} = (Y_{(i)} - \mu)/\sigma (i=1, 2, \dots, r)$, 则 $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(r)}$ 相当于来自 $F(x)$ 的样本量为 n 的样本的前 r 个顺序统计量。记

$$EX_{(i)} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$\text{cov}(X_{(i)}, X_{(j)}) = \nu_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq r$$

其中, α_i, ν_{ij} 只依赖于 n, r 和 F , 与 μ, σ 无关。由于

$$Y_{(i)} = \mu + \sigma X_{(i)} = \mu + \sigma \alpha_i + \varepsilon_i$$

其中, $\varepsilon_i = \sigma(X_{(i)} - \alpha_i)$ 。记 $Y^T = (Y_{(1)}, \dots, Y_{(r)})$, $\alpha^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, 用矩阵表示为

$$E(Y) = (\mathbf{1}_r, \alpha) \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad \text{var}(Y) = \sigma^2 V = \sigma^2 (\nu_{ij})_{r \times r}$$

其中, $\mathbf{1}_r$ 表示全部由元素 1 组成的 r 维列向量。这是一个广义高斯-马尔可夫模型, 利用式(17)可求出 μ, σ 的最优线性无偏估计为

$$\begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r^T V^{-1} \mathbf{1}_r & \alpha^T V^{-1} \mathbf{1}_r \\ \alpha^T V^{-1} \mathbf{1}_r & \alpha^T V^{-1} \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r^T \\ \alpha^T \end{pmatrix} V^{-1} Y = \begin{pmatrix} L_1^T Y \\ L_2^T Y \end{pmatrix} \quad (18)$$

其协方差阵为

$$\text{var} \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} L_1^T V L_1 & L_1^T V L_2 \\ L_2^T V L_1 & L_2^T V L_2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \quad (19)$$

其中, A, B, C 的值只依赖于 n, r 和 F , 与 μ, σ 无关, 其值可查附表 B. 1、附表 B. 3 或参考文献 [1] 的表 1、表 5。

该估计方法有一个明显的优点: 不论 n 个样本点中被观测的个数是多少, 上述过程均可类似进行。这一性质使它在可靠性数据分析中有着广泛的应用。

A. 3. 7 最优线性不变估计

设 $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 是参数 θ 的一个估计量, 如果在样本作某种特定变换下, 估计量 $\hat{\theta}$ 具有某种相应的性质, 则称 $\hat{\theta}$ 是在该变换下 θ 的不变估计 (也称同变估计), 简称不变估计。

设 $\hat{\theta}$ 是某种特定变换下 θ 的不变估计, 如果对此种变换下 θ 的任一不变估计 $\check{\theta}$, 有

$$\text{MSE}_{\varphi}(\hat{\theta}) \leq \text{MSE}_{\varphi}(\check{\theta}), \quad \forall \check{\theta} \in \Theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是此变换下 θ 的最优不变估计, 简称最优不变估计。

设 X_1, \dots, X_n 是来自某个分布的一个样本, 如果参数 θ 的估计 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 是样本的线性函数, 且 $\hat{\theta}$ 是 θ 在某一变换下的不变估计, 则称 $\hat{\theta}$ 是在该变换下 θ 的线性不变估计。假如对 θ 任一线性不变估计 $\check{\theta}$, 还有

$$\text{MSE}_{\varphi}(\hat{\theta}) \leq \text{MSE}_{\varphi}(\check{\theta}), \quad \forall \check{\theta} \in \Theta$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最优线性不变估计 BLIE (Best Linear Invariant Estimate)。

设 X_1, \dots, X_n 是来自密度函数为 $\frac{1}{\sigma} f((x - \mu)/\sigma)$ 的一个样本, 记 $\theta = l_1\mu + l_2\sigma$, 要估计 θ 。

假如 $\hat{\theta} = l_1\hat{\mu} + l_2\hat{\sigma} = l_1\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) + l_2\hat{\sigma}(X_1, \dots, X_n)$ 是 θ 的线性不变估计, 则对任意的 $a > 0$ 和任意的 c , 应有

$$\hat{\mu}(aX_1 + c, \dots, aX_n + c) = a\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n) + c$$

$$\hat{\sigma}(aX_1 + c, \dots, aX_n + c) = a\hat{\sigma}(X_1, \dots, X_n)$$

从而

$$\hat{\theta}(aX_1 + c, \dots, aX_n + c) = a\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) + l_1c \quad (20)$$

由前面介绍过的 μ 和 σ 的最优线性无偏估计, 令 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\sigma}$ 分别表示为由式 (18) 给出的 μ 和 σ 的最优线性无偏估计, 其协方差称由式 (19) 给出。在式 (20) 中取 $a = 1/\hat{\sigma}, c = -\hat{\mu}/\hat{\sigma}$, 则有

$$\frac{\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)}{\hat{\sigma}} - \frac{l_1\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \hat{\theta}\left[\left(\frac{X_1 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right), \dots, \left(\frac{X_n - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right]$$

记 $h = h(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, X) = \hat{\theta}\left[\left(\frac{X_1 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right), \dots, \left(\frac{X_n - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right)\right]$, 得到 $\hat{\theta}$ 的一般形式:

$$\hat{\theta}_h = l_1 \hat{\mu} + l_2 \hat{\sigma} \quad (21)$$

其均方误差为

$$E(\hat{\theta}_h - \theta)^2 = \sigma^2 [C h^2 + A l_1^2 + (h - l_2)^2 + 2h l_1 B]$$

对上式求导并令导数等于 0 可知,当 $h = (l_2 - l_1 B)/(1 + C)$ 时, $\text{MSE}_{\theta}(\hat{\theta}_h)$ 达最小,从而给出 θ 的最优线性不变估计为

$$\hat{\theta} = l_1 \hat{\mu} + \frac{l_2 - l_1 B}{1 + C} \hat{\sigma} \quad (22)$$

特别,若取 $l_1 = 0, l_2 = 1$ 和 $l_1 = 1, l_2 = 0$,则分别给出 σ 和 μ 的 BLIE 为

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{1 + C} \hat{\sigma}, \quad \hat{\mu}_1 = \hat{\mu} - \frac{B}{1 + C} \hat{\sigma} \quad (23)$$

A.3.8 简单线性无偏估计

对于分布函数 $F((y - \mu)/\sigma)$ 中的参数 μ 和 σ ,在样本量 $n \leq 25$ 时,用最优线性无偏估计和最优线性不变估计,可以得到精度较高的估计。下面讨论当 $n \geq 25$ 时, μ 和 σ 的简单线性无偏估计的构造。

设从分布为 $F((y - \mu)/\sigma)$ 的总体中,随机抽取样本量为 n 的样本,按从小到大的顺序排列所得截尾子样的前 r 个观测值为 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(r)}$ ($r \geq 2$)。利用这些数据,可以构造尺度参数 σ 和位置参数 μ 的简单线性无偏估计 $\hat{\sigma}_s$ 和 $\hat{\mu}_s$ 。

1. 尺度参数 σ 的简单线性无偏估计

对 σ 的估计,构造如下统计量

$$\hat{\sigma}_s = \sum_{i=1}^r |X_{(s)} - X_{(i)}| / (n k_{s,r,n}) \quad (24)$$

或者

$$\hat{\sigma}_s = \left[(2s - r - 1)X_{(s)} - \sum_{i=1}^{s-1} X_{(i)} + \sum_{i=s+1}^r X_{(i)} \right] / (n k_{s,r,n}) \quad (25)$$

其中, $k_{s,r,n}$ 称为无偏性系数,它依赖于样本量 n 、截尾数 $n - r$ 和 s ($2 \leq s \leq r$) 三个参数,其值可根据 $\hat{\sigma}_s$ 的无偏性求得,即由

$$E(\hat{\sigma}_s) = E \left[\sum_{i=1}^r |X_{(s)} - X_{(i)}| / (n k_{s,r,n}) \right] = \sigma$$

求得

$$k_{s,r,n} = \frac{1}{n} \left[(2s - r - 1)E(Z_{(s)}) - \sum_{i=1}^{s-1} E(Z_{(i)}) + \sum_{i=s+1}^r E(Z_{(i)}) \right] \quad (26)$$

其中, $Z_{(i)}$ 为标准分布 $F(z)$ 的第 i 个顺序统计量;对极值分布和威布尔分布而言,标准分布

$F(z)$ 为标准极值分布; 对正态分布和对数正态分布而言, 标准分布 $F(z)$ 为标准正态分布。对于给定样本量 n , $E(Z_{(i)})$ 可计算, 由此得到 $k_{s,r,n}$ 的数值。

至于式(24)和式(25)中 s 的选择, 要考虑估计量 $\hat{\sigma}_s$ 的有效性, 也就是使 $\hat{\sigma}_s$ 的方差尽量小。特别对极值分布, Engelhardt 和 Bain(1973)得到对 s 的选择方案如下:

$$s = \begin{cases} r, & 2 \leq r \leq 0.9n \\ n, & r = n, \quad n \leq 15 \\ n-1, & r = n, \quad 16 \leq n \leq 24 \\ [0.892n] + 1, & r = n, \quad n > 25 \end{cases} \quad (27)$$

上式表明, 在截尾样本情形下, 取 $s=r$ ($2 \leq r \leq 0.9n$), 这时式(24)可简化为

$$\hat{\sigma}_s = \sum_{i=1}^r (X_{(r)} - X_{(i)}) / n k_{r,n} = \frac{(r-1)X_{(r)} - \sum_{i=1}^{r-1} X_{(i)}}{n k_{r,n}} \quad (28)$$

对完全样本情形, 分以下三种情况:

① 当 $n \leq 15$ 时, s 取为 n , σ 的估计, 采用式(24);

② 当 $16 \leq n \leq 24$ 时, s 取为 $n-1$, σ 的估计为

$$\hat{\sigma}_s = \sum_{i=1}^n |X_{(n-1)} - X_{(i)}| / n k_{n-1,n} \quad (29)$$

③ 当 $n > 25$ 时, 将式(24)中的 s 取为 $[0.892n] + 1$ 即可。

2. 位置参数 μ 的简单线性无偏估计

由于 $Z_{(s)} = (X_{(s)} - \mu) / \sigma$, 于是

$$E(X_{(s)}) = \mu + \sigma E(Z_{(s)}) \quad (30)$$

根据 σ 的简单线性无偏估计 $\hat{\sigma}_s$ 和式(30), 构造 μ 的简单线性无偏估计如下:

$$\hat{\mu}_s = X_{(s)} - \hat{\sigma}_s E(Z_{(s)}) \quad (31)$$

由式(31)可知, 当 $2 \leq r \leq 0.9n$ 时, 取 $s=r$, 上式改为

$$\hat{\mu}_s = X_{(r)} - \hat{\sigma}_s E(Z_{(r)}) \quad (32)$$

显然, $\hat{\mu}_s$ 是 μ 的无偏估计, 而 $\hat{\sigma}_s$ 和 $\hat{\mu}_s$ 的方差与协方差分别为

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\sigma}_s) &= l_{s,r,n} \sigma^2 \\ \text{var}(\hat{\mu}_s) &= A_{s,r,n} \sigma^2 \\ \text{cov}(\hat{\mu}_s, \hat{\sigma}_s) &= B_{s,r,n} \sigma^2 \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $l_{s,r,n}$, $A_{s,r,n}$, $B_{s,r,n}$ 可以用标准分布 $F(z)$ 的顺序统计量 $Z_{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, r$) 的期望、方差和协方差表示, 可查附表 B. 2、附表 B. 4 或参考文献[1]的表 2、表 6。

A.3.9 简单线性不变估计

这里以极值分布参数的简单线性不变估计为例介绍。设 $\hat{\mu}_s, \hat{\sigma}_s$ 分别是极值分布参数 μ, σ 的简单线性无偏估计, 用不变估计的方法由 $\hat{\mu}_s, \hat{\sigma}_s$ 得到 μ, σ 的简单线性不变估计:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_s^* &= \frac{\hat{\sigma}_s}{1 + l_{s,r,n}} = \frac{\sum_{i=1}^r |X_{(s)} - X_{(i)}|}{n k_{s,r,n} (1 + l_{s,r,n})} \\ \hat{\mu}_s^* &= \hat{\mu}_s - \frac{B_{s,r,n}}{1 + l_{s,r,n}} \hat{\sigma}_s \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

当 $2 \leq r \leq 0.9n$ 时, 式(34)改写为

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_s^* &= \frac{\hat{\sigma}_s}{1 + l_{r,n}} = \frac{\sum_{i=1}^r |X_{(r)} - X_{(i)}|}{n k_{r,n} (1 + l_{r,n})} \\ \hat{\mu}_s^* &= \hat{\mu}_s - \frac{B_{r,n}}{1 + l_{r,n}} \hat{\sigma}_s \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

相应地, 还可以得到 $\hat{\mu}_s^*, \hat{\sigma}_s^*$ 的均方误差

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\mu}_s^*) &= \left(A_{r,n} - \frac{B_{r,n}^2}{1 + l_{r,n}} \right) \sigma^2 \\ \text{MSE}(\hat{\sigma}_s^*) &= \frac{l_{r,n}}{1 + l_{r,n}} \sigma^2 \end{aligned} \quad (36)$$

并且简单线性不变估计的均方误差比简单线性无偏估计的均方误差小。

A.4 区间估计

点估计的问题是用一个统计量去估计未知参数 θ , 用相应的统计量的样本值去估计参数值, 不同的样本给出的点估计值是不同的。那么人们自然要问, 对于一次具体的抽样而言, 所给出的点估计值离真值有“多远”。为此, 希望能估计出两个端点, 以这两个端点所构成的区间来估计参数 θ , 并使这个区间以比较大的概率包含参数 θ 的真值。这样, 既可以回答估计值离参数真值有多远, 又能提供估计精度的一个概念。这就是区间估计的问题。

设总体分布含有一未知参数 θ 。若由样本确定的两个统计量 $\theta_L(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\theta_U(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于给定的 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 满足

$$P\{\theta_L \leq \theta \leq \theta_U\} = 1 - \alpha \quad (37)$$

称区间 $[\theta_L, \theta_U]$ 是参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间(也称区间估计), θ_L 称为置信下限, θ_U 称为置信上限, $1 - \alpha$ 称为置信度或置信水平, α 称为显著性水平。

若满足

$$P\{\theta \leq \theta_U\} = 1 - \alpha \quad \text{或} \quad P\{\theta_L \leq \theta\} = 1 - \alpha \quad (38)$$

则称 θ_U (或 θ_L) 为参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限 (或单侧置信下限)。

构造置信区间或置信限, 需要具体问题具体分析, 有三种一般性的方法可以用来寻找优良的置信区间。这里介绍枢轴量方法, 此外还有统计量方法 (也称样本空间排序法) 与借助假设检验的非拒绝域确定置信区间的方法。

下面介绍枢轴量方法, 它是实际中最常用的方法。具体如下:

设法寻找一个依赖于参数 θ 和样本 X 的函数 $h(\theta, X)$, 其分布与 θ 无关, 记其分布为 F 。对于给定的置信水平 $1 - \alpha$, 寻找常数 a, b , 使

$$P_\theta(a \leq h(\theta, X) \leq b) = F(b) - F(a) = 1 - \alpha$$

如果不等式 $a \leq h(\theta, X) \leq b$ 可改写为 $\hat{g}_1(X) \leq \theta \leq \hat{g}_2(X)$ 的形式, 则上式变成

$$P_\theta[\hat{g}_1(X) \leq \theta \leq \hat{g}_2(X)] = 1 - \alpha \quad (39)$$

这表明: $[\hat{g}_1(X), \hat{g}_2(X)]$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的区间估计。

例 1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知, 现有其一组随机样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 求 μ 的区间估计。

解: 由于 $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, 则 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ 服从标准正态分布 Φ , 令 $u_{1-\alpha}$ 为标准正态分布的 $1 - \alpha$ 分位点, 即 $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, 其中“i. i. d.”指独立同分布。由 Φ 关于 0 对称, 可知

$$P_\theta(|\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma| \leq u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

即

$$P_\theta\left(\bar{X} - \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

因此, $\left[\bar{X} - \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]$ 是 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的区间估计。

附录 B 相关计算用表

附表 B.1~B.15 为相关计算用表。

附表 B.1 最优线性估计用表(极值分布、威布尔分布)

(a) 最优线性无偏估计和最好线性不变估计系数

n	r	j	$C(n, r, j)$	$D(n, r, j)$	$C_I(n, r, j)$	$D_I(n, r, j)$
5	2	1	-0.896 3	-0.959 9	-0.473 0	-0.481 4
5	2	2	0.896 3	1.959 9	0.473 0	1.481 4
5	3	1	-0.434 3	-0.210 1	-0.306 6	-0.138 0
5	3	2	-0.364 2	-0.086 0	-0.257 1	-0.025 5
5	3	3	0.798 6	1.296 1	0.563 7	1.163 5
5	4	1	-0.273 0	-0.015 4	-0.217 8	-0.007 0
5	4	2	-0.249 9	0.052 0	-0.199 4	0.059 7
5	4	3	-0.149 1	0.152 1	-0.118 9	0.156 7
5	4	4	0.672 1	0.811 3	0.536 0	0.790 7
5	5	1	-0.184 5	0.058 4	-0.158 1	0.053 0
5	5	2	-0.181 7	0.108 8	-0.155 7	0.103 5
5	5	3	-0.130 5	0.167 6	-0.111 8	0.163 8
5	5	4	-0.006 5	0.246 3	-0.005 6	0.246 1
5	5	5	0.503 1	0.418 9	0.431 3	0.433 6
6	2	1	-0.914 1	-1.165 6	-0.477 8	-0.588 3
6	2	2	0.914 1	2.165 6	0.477 8	1.588 3
6	3	1	-0.446 6	-0.315 4	-0.311 8	-0.211 5
6	3	2	-0.388 6	-0.203 4	-0.271 4	-0.113 0
6	3	3	0.835 3	1.518 8	0.583 2	1.324 5
6	4	1	-0.285 9	-0.086 5	-0.225 1	-0.063 6
6	4	2	-0.265 5	-0.028 1	-0.209 1	-0.006 7
6	4	3	-0.185 9	0.064 9	-0.146 4	0.079 9
6	4	4	0.737 2	1.049 6	0.580 6	0.990 4

续附表 B. 1(a)

n	r	j	$C(n, r, j)$	$D(n, r, j)$	$C_I(n, r, j)$	$D_I(n, r, j)$
6	5	1	-0.201 5	0.005 7	-0.169 9	0.007 5
6	5	2	-0.197 3	0.046 6	-0.166 3	0.048 3
6	5	3	-0.153 6	0.100 2	-0.129 5	0.101 6
6	5	4	-0.064 6	0.172 3	-0.054 5	0.172 9
6	5	5	0.617 0	0.675 2	0.520 2	0.669 7
6	6	1	-0.145 8	0.048 9	-0.128 8	0.044 8
6	6	2	-0.149 5	0.083 5	-0.132 1	0.079 4
6	6	3	-0.126 7	0.121 1	-0.112 0	0.117 5
6	6	4	-0.073 2	0.165 6	-0.064 7	0.163 6
6	6	5	0.036 0	0.225 5	0.031 8	0.226 5
6	6	6	0.459 3	0.355 4	0.405 7	0.368 2
7	2	1	-0.926 7	-1.338 3	-0.481 1	-0.676 9
7	2	2	0.926 7	2.338 3	0.481 1	1.676 9
7	3	1	-0.455 0	-0.403 6	-0.315 4	-0.272 2
7	3	2	-0.405 6	-0.301 2	-0.281 1	-0.184 1
7	3	3	0.860 5	1.704 8	0.596 5	1.456 3
7	4	1	-0.294 0	-0.146 3	-0.229 7	-0.110 3
7	4	2	-0.276 0	-0.094 1	-0.215 6	-0.060 2
7	4	3	-0.210 2	-0.007 1	-0.164 2	0.018 7
7	4	4	0.780 2	1.247 5	0.609 5	1.151 8
7	5	1	-0.211 0	-0.039 3	-0.176 2	-0.030 4
7	5	2	-0.206 5	-0.004 4	-0.172 4	0.004 3
7	5	3	-0.169 1	0.045 8	-0.141 2	0.053 0
7	5	4	-0.099 2	0.113 4	-0.082 8	0.117 6
7	5	5	0.685 8	0.884 4	0.572 6	0.855 5
7	6	1	-0.158 7	0.013 7	-0.138 4	0.044 8
7	6	2	-0.160 9	0.041 8	-0.140 3	0.079 4
7	6	3	-0.139 6	0.075 7	-0.121 8	0.117 5
7	6	4	-0.095 1	0.117 6	-0.082 9	0.163 6
7	6	5	-0.017 6	0.172 1	-0.015 4	0.226 5
7	6	6	0.571 9	0.579 1	0.498 9	0.368 2

续附表 B.1(a)

n	r	j	$C(n, r, j)$	$D(n, r, j)$	$C_I(n, r, j)$	$D_I(n, r, j)$
7	7	1	-0.120 1	0.041 8	-0.108 3	0.038 7
7	7	2	-0.125 9	0.067 3	-0.113 5	0.064 1
7	7	3	-0.114 9	0.093 7	-0.103 6	0.090 8
7	7	4	-0.087 3	0.123 2	-0.078 7	0.121 0
7	7	5	-0.036 2	0.158 6	-0.032 6	0.157 7
7	7	6	0.060 7	0.206 3	0.054 7	0.207 8
7	7	7	0.423 7	0.309 0	0.382 0	0.319 9
8	2	1	-0.936 1	-1.486 9	-0.483 6	-0.752 5
8	2	2	0.936 1	2.486 9	0.483 6	1.752 5
8	3	1	-0.461 0	-0.479 4	-0.317 9	-0.323 9
8	3	2	-0.418 0	-0.384 8	-0.288 2	-0.243 8
8	3	3	0.879 0	1.864 2	0.606 1	1.567 7
8	4	1	-0.299 8	-0.197 7	-0.232 8	-0.150 0
8	4	2	-0.283 7	-0.150 2	-0.220 3	-0.105 0
8	4	3	-0.227 5	-0.068 5	-0.176 7	-0.032 3
8	4	4	0.810 9	1.416 4	0.629 8	1.287 2
8	5	1	-0.217 2	-0.078 1	-0.180 2	-0.062 7
8	5	2	-0.212 8	-0.047 4	-0.176 5	-0.032 2
8	5	3	-0.180 3	-0.000 1	-0.149 6	0.012 8
8	5	4	0.122 5	0.063 7	-0.101 6	0.072 4
8	5	5	0.732 8	1.061 9	0.607 9	1.009 7
8	6	1	-0.166 1	-0.017 2	-0.143 8	-0.013 5
8	6	2	-0.167 5	0.006 5	-0.145 0	0.010 3
8	6	3	-0.148 3	0.038 0	-0.128 4	0.041 4
8	6	4	-0.110 5	0.078 0	-0.095 7	0.080 5
8	6	5	-0.050 0	0.129 2	-0.043 3	0.130 3
8	6	6	0.642 4	0.765 5	0.556 2	0.751 1
8	7	1	-0.130 3	0.016 8	-0.116 3	0.016 0
8	7	2	-0.134 8	0.037 6	-0.120 3	0.036 7
8	7	3	-0.123 8	0.061 2	-0.110 6	0.060 4

续附表 B. 1(a)

n	r	j	$C(n, r, j)$	$D(n, r, j)$	$C_I(n, r, j)$	$D_I(n, r, j)$
8	7	4	-0.099 1	0.088 8	-0.088 5	0.088 2
8	7	5	-0.057 1	0.122 5	-0.051 0	0.122 1
8	7	6	0.010 9	0.165 5	0.009 7	0.165 5
8	7	7	0.534 3	0.507 6	0.477 0	0.511 0
8	8	1	-0.101 9	0.036 5	0.093 3	0.034 1
8	8	2	-0.108 1	0.056 1	-0.098 9	0.053 6
8	8	3	-0.102 7	0.075 9	-0.094 0	0.073 5
8	8	4	-0.087 2	0.097 1	-0.079 8	0.095 1
8	8	5	-0.058 9	0.121 2	-0.053 9	0.119 8
8	8	6	-0.011 1	0.150 2	-0.010 2	0.149 9
8	8	7	0.075 8	0.189 4	0.069 3	0.191 2
8	8	8	0.394 2	0.273 5	0.360 7	0.282 9
9	2	1	-0.943 4	-1.617 3	-0.485 5	-0.818 4
9	2	2	0.943 4	2.617 3	0.485 5	0.818 4
9	3	1	-0.465 6	-0.545 8	-0.319 8	-0.368 8
9	3	2	-0.427 5	-0.457 7	-0.293 6	-0.295 3
9	3	3	0.893 2	2.003 5	0.613 4	1.664 1
9	4	1	-0.304 0	-0.242 7	-0.235 1	-0.184 5
9	4	2	-0.289 5	-0.199 0	-0.223 9	-0.143 5
9	4	3	-0.240 5	-0.121 9	-0.186 0	-0.075 8
9	4	4	0.834 0	1.563 6	0.644 9	1.403 8
9	5	1	-0.221 7	-0.112 3	-0.183 1	-0.090 7
9	5	2	-0.217 4	-0.084 7	-0.179 5	-0.063 5
9	5	3	-0.188 7	-0.039 8	-0.155 8	-0.021 5
9	5	4	-0.139 4	0.020 6	-0.115 1	0.034 2
9	5	5	0.767 3	1.216 1	0.633 5	1.141 6
9	6	1	-0.171 2	-0.044 6	-0.147 4	-0.037 1
9	6	2	-0.172 0	-0.023 9	-0.148 2	-0.016 4
9	6	3	-0.154 7	0.005 7	-0.133 2	0.012 5
9	6	4	-0.122 0	0.044 0	-0.105 1	0.049 3
9	6	5	-0.072 1	0.092 5	-0.062 1	0.095 6
9	6	6	0.692 0	0.926 4	0.595 9	0.896 1

续附表 B. 1(a)

n	r	j	$C(n, r, j)$	$D(n, r, j)$	$C_I(n, r, j)$	$D_I(n, r, j)$
9	7	1	-0.036 4	-0.005 8	-0.121 0	-0.004 2
9	7	2	-0.140 0	0.011 8	-0.124 2	0.013 4
9	7	3	-0.129 7	0.033 6	-0.115 1	0.035 1
9	7	4	-0.107 6	0.060 0	-0.095 5	0.061 2
9	7	5	-0.072 3	0.092 2	-0.064 2	0.093 0
9	7	6	-0.019 4	0.132 5	-0.017 2	0.132 7
9	7	7	0.605 5	0.675 7	0.537 2	0.668 8
9	8	1	-0.110 2	0.017 8	-0.100 0	0.016 8
9	8	2	-0.115 4	0.034 0	-0.104 7	0.032 9
9	8	3	-0.109 7	0.051 6	-0.099 6	0.050 6
9	8	4	-0.095 0	0.071 4	-0.086 2	0.070 5
9	8	5	-0.070 0	0.094 3	-0.063 5	0.093 6
9	8	6	-0.031 2	0.121 8	-0.028 3	0.121 6
9	8	7	0.029 2	0.156 9	0.026 5	0.157 2
9	8	8	0.502 4	0.452 3	0.456 0	0.456 8
9	9	1	-0.088 4	0.032 3	-0.081 8	0.030 3
9	9	2	-0.094 4	0.048 0	-0.087 3	0.045 9
9	9	3	-0.092 0	0.063 4	-0.085 1	0.061 4
9	9	4	-0.082 7	0.079 6	-0.076 5	0.077 7
9	9	5	-0.065 6	0.097 2	-0.060 7	0.095 8
9	9	6	-0.038 0	0.117 4	-0.035 1	0.116 5
9	9	7	0.006 5	0.141 8	0.006 0	0.141 9
9	9	8	0.085 2	0.174 9	0.078 8	0.176 8
9	9	9	0.369 2	0.245 5	0.341 6	0.253 7

(b) 最好线性无偏估计有关数值表

n	r	$E(Z_{r,n})$	$l_{r,n}^{-1}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
2	1	-1.270 4			
2	2	0.115 9	1.404 8	1.516 2	0.288 2

续附表 B.1(b)

n	r	$E(Z_{r,n})$	$l_{r,n}^{-1}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
3	1	-1.675 8			
3	2	-0.459 4	1.221 9	1.091 7	0.181 6
3	3	0.403 6	2.901 0	2.482 2	0.655 3
4	1	-1.963 5			
4	2	-0.812 8	1.153 4	0.749 6	0.133 0
4	3	-0.106 1	2.549 5	2.308 6	0.607 8
4	4	0.573 5	4.438 9	3.407 6	0.774 7
5	1	-2.186 7			
5	2	-1.070 9	1.117 3	0.558 9	0.105 0
5	3	-0.425 6	2.399 1	1.888 9	0.583 2
5	4	0.106 9	3.940 2	3.426 8	0.746 2
5	5	0.690 2	6.000 7	4.321 6	0.833 4
6	1	-2.369 0			
6	2	-1.275 0	1.094 9	0.445 6	0.086 7
6	3	-0.662 7	2.314 2	1.531 5	0.567 9
6	4	-0.188 4	3.707 6	3.089 1	0.730 3
6	5	0.254 5	5.373 3	4.472 1	0.813 9
6	6	0.777 3	7.578 0	5.230 8	0.868 0
7	1	-2.523 1			
7	2	-1.444 1	1.079 8	0.372 3	0.073 9
7	3	-0.852 5	2.259 3	1.269 1	0.557 4
7	4	-0.409 7	3.569 4	2.683 5	0.719 8
7	5	-0.022 4	5.061 6	4.250 0	0.822 4
7	6	0.365 3	6.836 6	5.473 4	0.853 7
7	7	0.846 0	9.166 2	6.137 7	0.890 4
8	1	-2.656 7			
8	2	-1.588 4	1.068 8	0.321 5	0.064 4
8	3	-1.011 1	2.220 9	1.078 7	0.549 7
8	4	-0.588 2	3.477 1	2.321 7	0.712 4
8	5	-0.231 2	4.869 3	3.875 3	0.794 6
8	6	0.102 9	6.450 2	5.359 6	0.845 0

n	r	$E(Z_{r,n})$	$l_{r,n}^{-1}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
8	7	0.452 8	8.322 8	6.447 5	0.879 8
8	8	0.902 1	10.762 4	7.043 1	0.907 1
9	1	-2.774 4			
9	2	-1.714 4	1.060 5	0.284 4	0.057 0
9	3	-1.147 5	2.192 4	0.937 7	0.543 9
9	4	-0.738 3	3.410 9	2.025 4	0.706 8
9	5	-0.400 5	4.737 4	3.478 5	0.788 9
9	6	-0.095 8	6.204 5	5.050 0	0.838 8
9	7	0.202 2	7.866 2	6.426 0	0.872 9
9	8	0.524 4	9.826 8	7.404 2	0.898 2
9	9	0.949 3	12.364 7	7.947 7	0.919 1

附表 B.2 简单线性无偏估计表(极值分布、威布尔分布)

 $n=26$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
1	1	-3.835 3				
2	2	-2.815 6	1.019 7	1.016 0	0.117 5	0.015 8
3	3	-2.295 2	2.060 6	2.045 1	0.329 5	0.511 0
4	4	-1.940 7	3.124 0	3.121 1	0.656 8	0.679 6
5	5	-1.668 7	4.211 8	4.153 1	1.089 2	0.759 2
6	6	-1.445 9	5.325 7	5.255 8	1.637 6	0.809 7
7	7	-1.255 6	6.468 1	6.346 5	2.324 6	0.842 4
8	8	-1.088 0	7.641 3	7.636 2	3.207 0	0.869 0
9	9	-0.937 1	8.848 2	8.729 1	4.175 7	0.885 4
10	10	-0.798 9	10.092 1	10.001 6	5.383 7	0.900 0
11	11	-0.670 4	11.376 9	11.183 3	6.629 0	0.910 6
12	12	-0.549 5	12.707 0	12.363 1	7.971 4	0.919 1
13	13	-0.434 4	14.087 8	13.767 7	9.375 4	0.927 4
14	14	-0.323 8	15.525 9	15.149 2	10.754 6	0.934 0
15	15	-0.216 4	17.029 2	16.603 4	12.199 0	0.939 8

$n=26$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
16	16	-0.111 2	18.607 7	17.984 2	13.672 4	0.944 4
17	17	-0.007 1	20.273 7	19.250 4	14.962 8	0.948 1
18	18	0.097 1	22.043 7	20.970 7	16.318 1	0.952 3
19	19	0.202 4	23.939 2	22.595 9	17.418 4	0.955 7
20	20	0.310 3	25.990 2	24.594 7	18.225 3	0.959 3
21	21	0.422 8	28.240 1	25.977 5	18.945 2	0.961 5
22	22	0.542 6	30.754 9	27.467 8	19.700 2	0.963 6
23	23	0.673 9	33.644 4	28.499 6	20.375 7	0.964 9
24	24	0.824 8	37.113 9	30.336 8	22.415 4	0.967 0
25	24	1.013 0	37.302 2	30.806 0	22.261 9	0.967 5
26	24	1.299 3	37.776 7	31.910 8	21.911 7	0.968 7

 $n=28$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
1	1	-3.909 4				
2	2	-2.891 1	1.018 3	1.016 1	0.111 8	0.015 8
3	3	-2.372 3	2.056 0	2.044 4	0.312 1	0.510 9
4	4	-2.019 4	3.114 5	3.121 5	0.614 7	0.679 6
5	5	1.749 3	4.195 2	4.189 5	1.000 8	0.761 3
6	6	-1.528 4	5.299 6	5.303 6	1.508 7	0.811 5
7	7	-1.340 0	6.429 6	6.377 1	2.115 2	0.843 2
8	8	-1.174 7	7.587 1	7.660 0	2.936 2	0.869 3
9	9	-1.026 3	8.774 5	8.936 7	3.888 0	0.888 1
10	10	-0.890 7	9.994 4	10.122 5	4.900 4	0.901 2
11	11	-0.765 2	11.249 7	11.367 5	6.040 3	0.912 0
12	12	-0.647 5	12.543 9	12.715 0	7.399 5	0.921 4
13	13	-0.536 1	13.881 2	13.936 0	8.707 2	0.928 2
14	14	-0.429 6	15.266 2	15.466 6	10.074 9	0.935 3
15	15	-0.326 8	16.704 6	16.812 2	11.490 1	0.940 5
16	16	-0.226 9	18.203 3	18.034 4	12.926 9	0.944 6

$n=28$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
17	17	-0.128 9	19.770 8	19.411 7	14.305 6	0.948 5
18	18	-0.032 1	21.417 4	20.944 0	15.887 1	0.952 3
19	19	0.064 5	23.156 5	22.169 0	17.213 3	0.954 9
20	20	0.161 8	25.005 1	23.969 9	18.455 9	0.958 3
21	21	0.260 9	26.986 2	25.677 6	19.325 2	0.961 1
22	22	0.363 1	29.131 6	27.507 8	20.156 6	0.963 6
23	23	0.470 1	31.486 9	29.304 3	20.998 7	0.965 9
24	24	0.584 7	34.122 3	31.172 2	21.683 3	0.967 9
25	25	0.711 0	37.154 0	32.371 5	22.281 5	0.969 1
26	25	0.856 9	37.299 8	32.731 3	22.177 3	0.969 4
27	25	1.039 8	37.628 6	33.489 6	21.963 9	0.970 1
28	25	1.319 8	38.237 3	34.882 1	21.635 7	0.971 3

 $n=30$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
1	1	-3.978 4				
2	2	-2.961 4	1.017 0	1.014 5	0.106 7	0.014 3
3	3	-2.443 8	2.052 1	2.046 4	0.295 4	0.511 3
4	4	-2.092 4	3.106 4	3.116 9	0.576 7	0.679 2
5	5	-1.823 7	4.181 0	4.187 2	0.949 3	0.761 2
6	6	-1.604 5	5.277 4	5.284 0	1.426 1	0.810 7
7	7	-1.417 9	6.397 0	6.424 9	2.020 0	0.844 4
8	8	-1.254 4	7.541 4	7.587 4	2.751 9	0.868 2
9	9	-1.108 0	8.712 7	8.787 5	3.607 1	0.886 2
10	10	-0.974 6	9.912 8	9.921 4	4.554 7	0.899 2
11	11	-0.851 5	11.144 3	11.081 4	5.636 3	0.909 8
12	12	-0.736 4	12.409 8	12.303 9	6.832 7	0.918 7
13	13	-0.627 9	13.712 4	13.593 4	8.184 2	0.926 4
14	14	-0.524 5	15.055 9	14.826 3	9.570 8	0.932 6
15	15	-0.425 3	16.444 5	16.173 2	10.898 3	0.938 2

r	s	$E(Z_{r,n})$	$n \cdot k_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}^{-1}$	$g_{r,n}$
16	16	-0.329 4	17.883 3	17.556 1	12.416 4	0.943 0
17	17	-0.236 0	19.378 1	19.001 7	13.863 2	0.947 4
18	18	-0.144 3	20.936 2	20.444 5	15.236 9	0.951 1
19	19	-0.053 8	22.566 6	21.792 5	16.708 7	0.954 1
20	20	0.036 4	24.280 0	23.299 0	18.092 6	0.957 1
21	21	0.126 9	26.090 6	24.839 9	19.391 2	0.959 7
22	22	0.218 6	28.016 4	26.312 4	20.601 7	0.962 0
23	23	0.312 5	30.081 5	28.046 5	21.416 5	0.964 3
24	24	0.409 8	32.319 4	29.631 8	22.320 3	0.966 3
25	25	0.512 3	34.778 4	31.181 4	23.096 1	0.967 9
26	26	0.622 4	37.532 2	32.799 4	23.725 6	0.969 5
27	27	0.744 4	40.703 7	34.461 5	24.083 0	0.971 0
28	27	0.885 8	40.845 1	34.810 4	23.982 3	0.971 3
29	27	1.064 1	41.164 8	35.578 8	23.772 4	0.971 9
30	27	1.338 5	41.758 9	36.948 1	23.430 9	0.972 9

附表 B.3 最好线性无偏估计表
(正态分布、对数正态分布)
(a) 最好线性无偏估计系数表

n	r	j	$C'(n,r,j)$	$D'(n,r,j)$	n	r	j	$C'(n,r,j)$	$D'(n,r,j)$
2	2	1	-0.886 2	0.500 0	4	3	1	-0.697 1	0.116 1
2	2	2	0.886 2	0.500 0	4	3	2	-0.126 8	0.240 8
					4	3	3	0.823 9	0.643 1
3	2	1	-1.181 6	0.000 0					
3	2	2	1.181 6	1.000 0	4	4	1	-0.453 9	0.250 0
					4	4	2	-0.110 2	0.250 0
3	3	1	-0.590 8	0.333 3	4	4	3	0.110 2	0.250 0
3	3	2	0.000 0	0.333 3	4	4	4	0.453 9	0.250 0
3	3	3	0.590 8	0.333 3					
					5	2	1	-1.497 1	-0.741 1
4	2	1	-1.365 4	-0.405 6	5	2	2	1.497 1	1.741 1

续附表 B.3(a)

n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$	n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$
4	2	2	1.365 4	1.405 6					
					5	3	1	-0.769 6	-0.063 8
5	3	2	-0.212 1	0.149 8	7	3	2	-0.326 9	-0.013 5
5	3	3	0.981 7	0.914 0	7	3	3	1.195 1	1.360 9
5	4	1	-0.511 7	0.125 2					
5	4	2	-0.166 8	0.183 0	7	4	1	-0.584 8	-0.073 8
5	4	3	0.027 4	0.214 7	7	4	2	-0.242 8	0.067 7
5	4	4	0.651 1	0.477 1	7	4	3	-0.071 7	0.137 5
5	5	1	-0.372 4	0.200 0	7	4	4	0.899 4	0.868 6
5	5	2	-0.135 2	0.200 0					
5	5	3	0.000 0	0.200 0	7	5	1	-0.437 0	0.046 5
5	5	4	0.135 2	0.200 0	7	5	2	-0.194 3	0.107 2
5	5	5	0.372 4	0.200 0	7	5	3	-0.071 8	0.137 5
					7	5	4	0.031 2	0.162 6
6	2	1	-1.598 8	-1.026 1	7	5	5	0.670 9	0.546 2
6	2	2	1.598 8	2.026 1					
					7	6	1	-0.344 0	0.108 8
6	3	1	-0.824 4	-0.215 9	7	6	2	-0.161 0	0.129 5
6	3	2	-0.276 0	0.064 9	7	6	3	-0.068 1	0.140 0
6	3	3	1.100 4	1.151 1	7	6	4	0.011 4	0.148 7
					7	6	5	0.090 1	0.157 1
6	4	1	-0.552 8	0.018 5	7	6	6	0.471 6	0.315 9
6	4	2	-0.209 1	0.122 6					
6	4	3	-0.029 0	0.176 1	7	7	1	-0.277 8	0.142 9
6	4	4	0.790 9	0.682 8	7	7	2	-0.135 1	0.142 9
					7	7	3	-0.062 5	0.142 9
6	5	1	-0.409 7	0.118 3	7	7	4	0.000 0	0.142 9
6	5	2	-0.168 5	0.151 0	7	7	5	0.062 5	0.142 9
6	5	3	-0.040 6	0.168 0	7	7	6	0.135 1	0.142 9
6	5	4	0.074 0	0.182 8	7	7	7	0.277 8	0.142 9
6	5	5	0.544 8	0.379 9					
					8	2	1	-1.750 2	-1.491 5

续附表 B.3(a)

n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$	n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$
6	6	1	-0.317 5	0.166 7	8	2	2	1.750 2	2.491 5
6	6	2	-0.138 6	0.166 7					
6	6	3	-0.043 2	0.166 7	8	3	1	-0.904 5	-0.463 2
6	6	4	0.043 2	0.166 7	8	3	2	-0.369 0	-0.085 5
6	6	5	0.138 6	0.166 7	8	3	3	1.273 5	1.548 7
6	6	6	0.317 5	0.166 7					
					8	4	1	-0.611 0	-0.154 9
7	2	1	-1.681 2	-1.273 3	8	4	2	-0.270 7	0.017 6
7	2	2	1.681 2	2.273 3	8	4	3	-0.106 1	0.100 1
					8	4	4	0.987 8	1.037 2
7	3	1	-0.868 2	-0.347 4					
8	5	1	-0.458 6	-0.016 7	9	5	1	-0.476 6	-0.073 1
8	5	2	-0.215 6	0.067 7	9	5	2	-0.233 5	0.031 6
8	5	3	-0.097 0	0.108 4	9	5	3	-0.118 1	0.080 9
8	5	4	0.000 2	0.141 3	9	5	4	-0.025 6	0.119 9
8	5	5	0.770 9	0.699 3	9	5	5	0.853 7	0.840 8
8	6	1	-0.363 8	0.056 9	9	6	1	-0.379 7	0.010 4
8	6	2	-0.178 8	0.096 2	9	6	2	-0.193 6	0.066 0
8	6	3	-0.088 1	0.115 3	9	6	3	-0.104 8	0.092 3
8	6	4	-0.013 2	0.130 9	9	6	4	-0.033 3	0.113 3
8	6	5	0.057 0	0.145 1	9	6	5	0.031 7	0.132 0
8	6	6	0.586 8	0.455 5	9	6	6	0.679 7	0.586 0
8	7	1	-0.297 8	0.099 7	9	7	1	-0.312 9	0.060 2
8	7	2	-0.151 5	0.113 9	9	7	2	-0.164 7	0.087 6
8	7	3	-0.079 6	0.120 8	9	7	3	-0.093 8	0.100 6
8	7	4	-0.020 0	0.126 5	9	7	4	-0.036 4	0.111 0
8	7	5	0.036 4	0.131 8	9	7	5	0.016 0	0.120 4
8	7	6	0.095 1	0.137 0	9	7	6	0.067 8	0.129 4
8	7	7	0.417 5	0.270 4	9	7	7	0.523 9	0.393 9
8	8	1	-0.247 6	0.125 0	9	8	1	-0.263 3	0.091 5
8	8	2	-0.129 4	0.125 0	9	8	2	-0.142 1	0.101 8

续附表 B.3(a)

n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$	n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$
8	8	3	-0.071 3	0.125 0	9	8	3	-0.084 1	0.106 7
8	8	4	-0.023 0	0.125 0	9	8	4	-0.037 0	0.110 6
8	8	5	0.023 0	0.125 0	9	8	5	0.006 2	0.114 2
8	8	6	0.071 3	0.125 0	9	8	6	0.049 2	0.117 7
8	8	7	0.129 4	0.125 0	9	8	7	0.095 4	0.121 2
8	8	8	0.247 6	0.125 0	9	8	8	0.375 7	0.236 5
9	2	1	-1.809 2	-1.686 8	9	9	1	-0.223 7	0.111 1
9	2	2	1.809 2	2.686 8	9	9	2	-0.123 3	0.111 1
					9	9	3	-0.075 1	0.111 1
9	3	1	-0.935 5	-0.566 4	9	9	4	-0.036 0	0.111 1
9	3	2	-0.404 7	-0.152 1	9	9	5	0.000 0	0.111 1
9	3	3	1.340 2	1.718 5	9	9	6	0.036 0	0.111 1
					9	9	7	0.075 1	0.111 1
9	4	1	-0.633 0	-0.227 2	9	9	8	0.123 3	0.111 1
9	4	2	-0.294 4	-0.028 4	9	9	9	0.223 7	0.111 1
9	4	3	-0.134 8	0.064 4					
9	4	4	1.062 2	1.191 2	10	2	1	-1.860 8	-1.863 4
10	2	2	1.860 8	2.863 4	10	8	1	-0.275 3	0.060 5
					10	8	2	-0.152 3	0.080 4
10	3	1	-0.962 5	-0.569 6	10	8	3	-0.094 7	0.089 8
10	3	2	-0.435 7	-0.213 8	10	8	4	-0.048 8	0.097 2
10	3	3	1.398 1	1.873 4	10	8	5	-0.007 7	0.103 7
					10	8	6	0.031 9	0.109 9
10	4	1	-0.652 0	-0.292 3	10	8	7	0.072 2	0.116 1
10	4	2	-0.315 0	-0.070 9	10	8	8	0.474 6	0.342 4
10	4	3	-0.159 3	0.030 5					
10	4	4	1.126 3	1.332 7	10	9	1	-0.236 4	0.084 3
					10	9	2	-0.133 4	0.092 1
10	5	1	-0.491 9	-0.124 0	10	9	3	-0.085 1	0.095 7
10	5	2	-0.249 1	-0.001 6	10	9	4	-0.046 5	0.098 6
10	5	3	-0.136 2	0.054 9	10	9	5	-0.011 9	0.101 1
10	5	4	-0.047 2	0.099 0	10	9	6	0.021 5	0.103 6

续附表 B.3(a)

n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$	n	r	j	$C'(n, r, j)$	$D'(n, r, j)$
10	5	5	0.924 3	0.971 8	10	9	7	0.055 9	0.106 0
					10	9	8	0.093 9	0.108 5
10	6	1	-0.393 0	-0.031 6	10	9	9	0.342 3	0.210 1
10	6	2	-0.206 3	0.038 3					
10	6	3	-0.119 2	0.070 7	10	10	1	-0.204 4	0.100 0
10	6	4	-0.050 1	0.096 2	10	10	2	-0.117 2	0.100 0
10	6	5	0.011 1	0.118 5	10	10	3	-0.076 3	0.100 0
10	6	6	0.757 6	0.707 8	10	10	4	0.043 6	0.100 0
					10	10	5	-0.014 2	0.100 0
10	7	1	-0.325 2	0.024 4	10	10	6	0.014 2	0.100 0
10	7	2	-0.175 8	0.063 6	10	10	7	0.043 6	0.100 0
10	7	3	-0.105 8	0.081 8	10	10	8	0.076 3	0.100 0
10	7	4	-0.050 2	0.096 2	10	10	9	0.117 2	0.100 0
10	7	5	-0.000 6	0.108 9	10	10	10	0.204 4	0.100 0
10	7	6	0.046 9	0.120 7					
10	7	7	0.610 7	0.504 5					

(b) 最好线性无偏估计有关数值表

n	r	$E(Z_{r,n})$	$L'_{r,u}$	$A'_{r,u}$	$B'_{r,u}$
2	1	-0.564 2			
	2	0.564 2	0.570 8	0.500 0	0.000 0
3	1	-0.846 3			
	2	0.000 0	0.637 8	0.448 7	0.204 4
	3	0.846 3	0.275 5	0.333 3	0.000 0
4	1	-1.029 4			
	2	-0.297 0	0.673 0	0.513 0	0.356 7
	3	0.297 0	0.302 1	0.287 0	0.067 2
	4	1.029 4	0.180 0	0.250 0	0.000 0
5	1	-1.163 0			
	2	-0.495 0	0.695 7	0.611 2	0.474 9
	3	0.000 0	0.318 1	0.283 9	0.123 4

续附表 B.3(b)

n	r	$E(Z_{r,n})$	$L'_{r,n}$	$A'_{r,n}$	$B'_{r,n}$
	4	0.495 0	0.194 8	0.217 7	0.033 0
	5	1.163 0	0.133 3	0.200 0	0.000 0
6	1	-1.267 2			
	2	-0.641 8	0.711 9	0.718 6	0.570 5
	3	-0.201 5	0.329 2	0.299 9	0.170 2
	4	0.201 5	0.204 4	0.206 8	0.062 4
	5	0.641 8	0.142 8	0.176 9	0.194 6
	6	1.267 2	0.105 7	0.166 7	0.000 0
7	1	-1.352 2			
	2	-0.757 4	0.724 3	0.826 4	0.826 4
	3	-0.352 7	0.337 5	0.324 8	0.324 8
	4	0.000 0	0.211 4	0.207 1	0.207 1
	5	0.352 7	0.149 3	0.166 0	0.166 0
	6	0.757 4	0.112 3	0.149 4	0.149 4
	7	1.352 2	0.087 5	0.142 9	0.142 9
8	1	-1.423 6			
	2	-0.852 2	0.734 2	0.931 0	0.718 6
	3	-0.472 8	0.344 1	0.354 1	0.244 2
	4	-0.152 5	0.216 8	0.213 8	0.110 6
	5	0.152 5	0.154 2	0.162 7	0.053 8
	6	0.472 8	0.117 1	0.139 9	0.025 0
	7	0.852 2	0.092 4	0.129 4	0.009 0
	8	1.423 6	0.074 6	0.125 0	0.000 0
9	1	-1.485 0			
	2	-0.932 3	0.742 3	1.031 3	0.778 1
	3	-0.572 0	0.349 4	0.385 3	0.274 3
	4	-0.274 5	0.221 2	0.224 1	0.130 5
	5	0.000 0	0.158 1	0.162 9	0.068 4
	6	0.274 5	0.120 7	0.135 2	0.036 2
	7	0.572 0	0.096 0	0.121 4	0.017 8
	8	0.932 3	0.078 4	0.114 4	0.006 7
	9	1.485 0	0.065 0	0.111 1	0.000 0

附表 B.4 简单线性无偏估计表(正态分布、对数正态分布)

 $n=21$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
1	1	-1.889 2			
2	2	-1.433 6	0.455 6	0.788 5	1.929 3
3	3	-1.160 5	1.001 8	0.385 9	0.741 2
4	4	-0.953 8	1.621 9	0.253 1	0.406 6
5	5	-0.781 5	2.311 1	0.187 3	0.262 4
6	6	-0.629 8	3.069 4	0.148 2	0.186 8
7	7	-0.491 5	3.899 5	0.122 4	0.142 4
8	8	-0.362 0	4.805 7	0.104 1	0.114 3
9	9	-0.238 4	5.794 6	0.090 6	0.095 6
10	10	-0.118 4	6.875 1	0.080 2	0.082 6
11	11	0.000 0	8.058 6	0.072 0	0.073 3
12	12	0.118 4	9.360 6	0.065 5	0.066 5
13	13	0.238 4	10.801 2	0.060 2	0.061 4
14	14	0.362 0	12.408 2	0.055 9	0.057 6
15	15	0.491 5	14.220 6	0.052 5	0.054 7
16	16	0.629 8	16.295 7	0.049 9	0.052 6
17	17	0.781 5	18.722 5	0.048 0	0.050 9
18	18	0.953 8	21.651 7	0.047 0	0.049 6
19	19	1.160 5	25.371 7	0.047 4	0.048 7
20	19	1.433 6	25.644 9	0.046 0	0.049 5
21	19	1.889 2	26.373 6	0.042 9	0.051 6

 $n=22$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
1	1	-1.909 7			
2	2	-1.458 2	0.451 5	0.790 5	1.986 3
3	3	-1.188 2	0.991 4	0.387 1	0.765 2
4	4	-0.984 6	1.602 3	0.253 9	0.420 3
5	5	-0.815 3	2.279 6	0.187 9	0.271 1
6	6	-0.666 7	3.022 6	0.148 7	0.192 7

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
7	7	-0.631 6	3.833 6	0.122 8	0.146 5
8	8	-0.405 6	4.715 0	0.104 4	0.117 1
9	9	-0.285 8	5.673 5	0.090 8	0.097 4
10	10	-0.170 0	6.715 8	0.080 4	0.083 7
11	11	-0.056 4	7.851 4	0.072 1	0.073 9
12	12	0.056 4	9.092 5	0.065 5	0.066 7
13	13	0.170 0	10.455 2	0.065 1	0.061 2
14	14	0.285 8	11.960 8	0.055 7	0.057 2
15	15	0.405 6	13.638 1	0.052 2	0.054 0
16	16	0.531 6	15.527 7	0.049 3	0.057 6
17	17	0.666 7	17.689 3	0.047 1	0.049 8
18	18	0.815 3	20.215 5	0.045 6	0.048 3
19	19	0.984 6	23.263 5	0.044 9	0.047 2
20	20	1.188 2	27.132 7	0.045 5	0.046 4
21	20	1.458 2	27.402 6	0.044 3	0.047 1
22	20	1.909 7	28.124 1	0.041 5	0.049

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
1	1	-1.929 2			
2	2	-1.481 4	0.447 8	0.792 4	2.041 0
3	3	-1.214 4	0.981 6	0.388 1	0.788 5
4	4	-1.013 6	1.584 3	0.254 7	0.433 7
5	5	-0.847 0	2.250 7	0.188 5	0.279 8
6	6	-0.701 2	2.979 8	0.165 4	0.225 9
7	7	-0.569 0	3.772 9	0.123 1	0.150 6
8	8	-0.446 1	4.633 0	0.104 7	0.120 0
9	9	-0.329 7	5.564 5	0.091 1	0.099 4
10	10	-0.217 5	6.573 4	0.080 5	0.085 0
11	11	-0.108 1	7.667 6	0.072 3	0.074 7
12	12	0.000 0	8.857 0	0.065 6	0.067 0

$n=23$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
13	13	0.108 1	10.154 6	0.060 1	0.061 3
14	14	0.217 5	11.577 0	0.055 6	0.056 9
15	15	0.329 7	13.146 5	0.051 9	0.053 5
16	16	0.446 1	14.893 1	0.048 9	0.050 9
17	17	0.569 0	16.859 0	0.046 5	0.048 8
18	18	0.701 2	19.106 2	0.049 2	0.048 1
19	19	0.847 0	21.730 9	0.043 4	0.046 0
20	20	1.013 6	24.896 1	0.043 0	0.045 1
21	21	1.214 4	28.913 9	0.043 8	0.044 3
22	21	1.481 4	29.180 8	0.042 6	0.044 9
23	21	1.929 2	29.895 5	0.040 1	0.046 7

 $n=24$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
1	1	-1.947 7			
2	2	-1.503 4	0.444 3	0.794 2	2.093 8
3	3	-1.239 2	0.972 6	0.389 1	0.811 2
4	4	-1.040 9	1.567 6	0.255 3	0.446 8
5	5	-0.876 8	2.223 9	0.189 0	0.288 3
6	6	-0.733 5	2.940 3	0.149 6	0.204 5
7	7	-0.604 0	3.717 6	0.123 5	0.154 8
8	8	-0.483 9	4.558 2	0.105 0	0.123 0
9	9	-0.370 5	5.465 7	0.091 3	0.101 5
10	10	-0.261 6	6.445 2	0.081 2	0.086 6
11	11	-0.155 8	7.503 2	0.072 4	0.075 6
12	12	-0.051 8	8.648 1	0.065 6	0.067 5
13	13	-0.051 8	9.890 2	0.060 1	0.061 4
14	14	0.155 8	11.243 2	0.055 6	0.056 8
15	15	0.261 6	12.724 4	0.051 8	0.053 2
16	16	0.370 5	14.356 9	0.048 6	0.050 3
17	17	0.483 9	16.171 9	0.046 0	0.048 1

$n=24$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
18	18	0,604 0	18,213 3	0,044 0	0,046 4
19	19	0,733 5	20,545 2	0,042 4	0,045 0
20	20	0,876 8	23,267 6	0,041 4	0,043 9
21	21	1,040 9	26,549 3	0,041 2	0,043 1
22	22	1,239 2	30,714 3	0,042 2	0,042 4
23	22	1,503 4	30,978 4	0,041 2	0,043 0
24	22	1,947 7	31,686 8	0,038 9	0,044 5

 $n=25$

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
1	1	-1,965 3			
2	2	-1,524 3	0,441 0	0,795 9	2,145 0
3	3	-1,262 8	0,964 1	0,390 1	0,833 3
4	4	-1,066 8	1,552 0	0,256 0	0,459 6
5	5	-0,905 0	2,199 1	0,189 6	0,296 7
6	6	-0,764 1	2,903 9	0,150 0	0,210 3
7	7	-0,636 9	3,666 8	0,123 9	0,158 9
8	8	-0,519 3	4,489 7	0,105 3	0,126 0
9	9	-0,408 6	5,375 7	0,091 6	0,103 7
10	10	-0,302 7	6,329 0	0,080 9	0,088 0
11	11	-0,200 1	7,355 1	0,072 5	0,076 6
12	12	-0,099 5	8,461 0	0,065 8	0,068 2
13	13	0,000 0	9,655 3	0,060 2	0,061 7
14	14	0,099 5	10,949 2	0,055 6	0,056 8
15	15	0,200 1	12,356 7	0,051 7	0,053 0
16	16	0,302 7	13,895 9	0,048 5	0,050 0
17	17	0,408 6	15,590 6	0,045 8	0,047 6
18	18	0,519 3	17,473 3	0,043 6	0,045 7
19	19	0,636 9	19,589 4	0,041 8	0,044 2
20	20	0,764 1	22,005 2	0,040 5	0,043 0

r	s	$E(Z_{r,n})$	$nk_{r,n}$	$l_{r,n}$	$A_{r,n}$
21	21	0.905 0	24.824 3	0.039 7	0.042 0
22	22	1.066 8	28.221 8	0.039 6	0.041 3
23	23	1.262 8	32.532 9	0.040 7	0.040 7
24	23	1.524 3	32.794 4	0.039 8	0.041 2
25	23	1.965 3	33.497 0	0.037 7	0.042 6

附表 B.5 W 分布的分位数表

n	r	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
3	3	0.11	0.17	0.25	0.42	0.57	0.67	0.78	0.99	1.33	1.56	1.86
4	3	0.10	0.15	0.22	0.39	0.53	0.64	0.75	0.96	1.32	1.56	1.90
	4	0.20	0.28	0.37	0.54	0.68	0.77	0.86	1.05	1.33	1.53	1.77
5	3	0.09	0.14	0.21	0.37	0.51	0.61	0.73	0.94	1.32	1.59	1.93
	4	0.18	0.26	0.34	0.50	0.64	0.74	0.84	1.03	1.35	1.55	1.82
	5	0.28	0.36	0.44	0.60	0.73	0.82	0.91	1.07	1.33	1.50	1.70
6	3	0.09	0.14	0.21	0.36	0.50	0.61	0.72	0.93	1.32	1.59	1.92
	4	0.18	0.25	0.32	0.49	0.62	0.72	0.82	1.01	1.33	1.55	1.84
	5	0.25	0.33	0.42	0.58	0.71	0.79	0.89	1.05	1.33	1.51	1.73
	6	0.33	0.41	0.50	0.65	0.77	0.85	0.93	1.07	1.31	1.46	1.64
7	3	0.08	0.14	0.20	0.35	0.49	0.59	0.71	0.92	1.30	1.56	1.92
	4	0.17	0.24	0.31	0.48	0.62	0.71	0.81	1.01	1.32	1.54	1.82
	5	0.25	0.32	0.40	0.56	0.70	0.78	0.88	1.05	1.33	1.52	1.75
	6	0.32	0.39	0.47	0.63	0.75	0.84	0.92	1.07	1.32	1.48	1.67
	7	0.38	0.46	0.54	0.69	0.80	0.87	0.95	1.08	1.30	1.43	1.60
8	3	0.08	0.13	0.19	0.35	0.49	0.59	0.70	0.92	1.31	1.58	1.95
	4	0.16	0.23	0.31	0.47	0.61	0.70	0.81	1.00	1.33	1.55	1.83
	5	0.23	0.31	0.39	0.55	0.68	0.77	0.87	1.05	1.33	1.52	1.76
	6	0.30	0.38	0.46	0.62	0.74	0.82	0.91	1.06	1.32	1.49	1.69
	7	0.36	0.44	0.52	0.67	0.78	0.86	0.94	1.08	1.30	1.45	1.62
	8	0.42	0.50	0.58	0.71	0.82	0.89	0.96	1.09	1.28	1.41	1.56
9	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.49	0.59	0.70	0.92	1.31	1.58	1.92

续附表 B.5

n	r	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
	4	0.16	0.23	0.31	0.47	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.55	1.84
	5	0.23	0.31	0.39	0.54	0.68	0.77	0.86	1.04	1.33	1.52	1.76
	6	0.30	0.38	0.45	0.60	0.73	0.81	0.90	1.06	1.31	1.48	1.70
	7	0.35	0.43	0.50	0.66	0.77	0.85	0.93	1.07	1.30	1.46	1.65
	8	0.40	0.48	0.55	0.70	0.81	0.88	0.95	1.08	1.28	1.42	1.59
	9	0.45	0.53	0.60	0.74	0.84	0.90	0.97	1.08	1.27	1.39	1.53
10	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.59	0.71	0.93	1.31	1.59	1.92
	4	0.16	0.23	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.57	1.86
	5	0.23	0.30	0.38	0.54	0.68	0.77	0.86	1.04	1.32	1.53	1.77
	6	0.29	0.37	0.45	0.60	0.73	0.81	0.90	1.06	1.31	1.49	1.71
	7	0.34	0.42	0.50	0.65	0.77	0.84	0.92	1.07	1.29	1.46	1.66
	8	0.39	0.47	0.54	0.69	0.80	0.87	0.95	1.08	1.28	1.43	1.60
	9	0.43	0.51	0.59	0.73	0.83	0.89	0.96	1.08	1.26	1.40	1.55
	10	0.48	0.55	0.62	0.76	0.85	0.91	0.98	1.09	1.31	1.38	1.51
11	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.59	0.71	0.92	1.34	1.60	1.97
	4	0.15	0.22	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.34	1.58	1.87
	5	0.22	0.30	0.38	0.54	0.67	0.76	0.86	1.04	1.34	1.54	1.82
	6	0.28	0.36	0.44	0.60	0.73	0.81	0.90	1.07	1.33	1.52	1.73
	7	0.33	0.41	0.49	0.65	0.76	0.84	0.92	1.08	1.32	1.48	1.67
	8	0.38	0.46	0.54	0.68	0.80	0.87	0.95	1.08	1.32	1.45	1.62
	9	0.42	0.50	0.57	0.71	0.82	0.89	0.96	1.09	1.29	1.42	1.58
	10	0.46	0.54	0.61	0.74	0.85	0.90	0.98	1.09	1.27	1.38	1.53
	11	0.50	0.57	0.64	0.77	0.87	0.93	0.99	1.09	1.25	1.36	1.49
12	3	0.08	0.13	0.19	0.34	0.48	0.58	0.70	0.92	1.30	1.56	1.87
	4	0.16	0.22	0.30	0.46	0.60	0.70	0.80	1.00	1.33	1.55	1.82
	5	0.23	0.30	0.38	0.54	0.67	0.76	0.86	1.04	1.33	1.53	1.78
	6	0.29	0.36	0.44	0.60	0.72	0.81	0.90	1.06	1.33	1.49	1.72
	7	0.34	0.41	0.50	0.65	0.76	0.84	0.93	1.08	1.31	1.47	1.66
	8	0.38	0.46	0.54	0.68	0.79	0.87	0.95	1.08	1.30	1.45	1.61
	9	0.42	0.50	0.57	0.71	0.82	0.89	0.96	1.09	1.29	1.43	1.58
	10	0.45	0.53	0.61	0.74	0.84	0.90	0.97	1.09	1.28	1.40	1.55
	11	0.49	0.56	0.64	0.76	0.86	0.92	0.98	1.09	1.27	1.37	1.51
	12	0.53	0.60	0.66	0.78	0.87	0.93	0.99	1.09	1.24	1.35	1.46

附表 B.6 V 分布的分位数表

n	r	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
3	3	-4.47	-2.54	-1.49	-0.52	-0.10	0.10	0.31	0.69	1.46	2.12	3.39
4	3	-6.92	-3.85	-2.32	-0.84	-0.29	-0.04	-0.18	0.50	1.06	1.55	2.43
	4	-2.37	-1.50	-0.96	-0.37	-0.08	-0.09	0.25	0.55	1.07	1.49	2.15
5	3	-9.35	-5.22	-3.04	-1.22	-0.50	-0.19	0.06	0.40	0.86	1.20	1.76
	4	-3.13	-1.94	-1.24	-0.50	-0.16	0.02	0.18	0.45	0.88	1.22	1.74
	5	-1.63	-1.08	-0.73	-0.31	-0.06	0.08	0.22	0.47	0.89	1.20	1.64
6	3	-10.54	-6.12	-3.72	-1.56	-0.69	-0.32	-0.04	0.33	0.75	1.02	1.39
	4	-3.69	-2.39	-1.59	-0.67	-0.25	-0.05	0.12	0.38	0.76	1.03	1.42
	5	-2.05	-1.36	-0.91	-0.38	-0.11	0.04	0.17	0.40	0.77	1.04	1.41
	6	-1.29	-1.36	-0.19	-0.38	-0.11	0.04	0.17	0.40	0.77	1.04	1.39
7	3	-13.00	-7.39	-4.45	-1.87	-0.89	-0.48	-0.16	0.26	0.68	0.90	1.20
	4	-4.67	-2.95	-1.94	-0.84	-0.36	-0.13	0.05	0.32	0.66	0.89	1.20
	5	-2.48	-1.59	-1.10	-0.48	-0.17	-0.02	0.12	0.34	0.66	0.89	1.21
	6	-1.54	-1.04	-0.73	-0.32	-0.10	0.03	0.15	0.35	0.67	0.90	1.20
7	7	-1.09	-0.79	-0.56	-0.26	-0.06	0.05	0.17	0.36	0.68	0.90	1.18
8	3	-14.36	-8.15	-5.01	-2.14	-1.04	-0.58	-0.21	0.24	0.67	0.88	1.12
	4	-5.34	-3.30	-2.18	-0.99	-0.43	-0.19	0.02	0.30	0.64	0.83	1.07
	5	-2.78	-1.86	-1.25	-0.56	-0.22	-0.05	0.10	0.32	0.62	0.82	1.07
	6	-1.80	-1.20	-0.83	-0.36	-0.12	0.01	0.13	0.33	0.63	0.82	1.08
	7	-1.28	-0.88	-0.61	-0.27	-0.07	0.04	0.15	0.33	0.63	0.82	1.08
	8	-0.97	-0.70	-0.50	-0.22	-0.05	0.06	0.16	0.34	0.63	0.82	1.07
9	3	-15.68	-9.12	-5.64	-2.38	-1.17	-0.66	-0.28	0.20	0.66	0.86	1.06
	4	-6.31	-3.78	-2.47	-1.08	-0.50	-0.24	-0.01	0.28	0.61	0.79	1.00
	5	-3.19	-2.10	-1.40	-0.63	-0.26	-0.08	0.08	0.30	0.58	0.76	0.98
	6	-2.01	-1.38	-0.94	-0.41	-0.15	-0.01	0.11	0.30	0.57	0.76	0.99
	7	-1.43	-0.99	-0.70	-0.31	-0.10	0.02	0.13	0.31	0.57	0.76	0.99
	8	-1.08	-0.76	-0.55	-0.25	-0.07	0.04	0.14	0.32	0.58	0.76	0.99
	9	-0.87	-0.64	-0.47	-0.21	-0.05	0.05	0.15	0.17	0.58	0.76	0.98
10	3	-17.45	-9.98	-6.05	-2.58	-1.29	-0.76	-0.34	0.27	0.66	0.87	1.07

续附表 B. 6

n	r	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.50	0.60	0.75	0.90	0.95	0.98
	4	-6.54	-4.17	-2.70	-1.22	-0.58	-0.28	-0.04	0.28	0.60	0.77	0.96
	5	-3.56	-2.37	-1.56	-0.73	-0.31	-0.12	0.05	0.28	0.56	0.72	0.93
	6	-2.21	-1.51	-1.03	-0.48	-0.19	-0.04	0.09	0.28	0.54	0.71	0.92
	7	-1.56	-1.08	-0.77	-0.35	-0.12	0.00	0.11	0.28	0.54	0.70	0.93
	8	-1.20	-0.86	-0.62	-0.27	-0.08	-0.02	0.12	0.28	0.53	0.71	0.93
	9	-0.97	-0.70	-0.50	-0.23	-0.06	0.04	0.13	0.29	0.54	0.71	0.93
	10	-0.80	-0.60	-0.44	-0.20	-0.04	0.04	0.14	0.29	0.54	0.71	0.92
11	3	-18.52	-10.68	-6.42	-2.76	-1.41	-0.85	-0.42	0.13	0.65	0.87	1.07
	4	-7.26	-4.57	-2.95	-1.37	-0.66	-0.36	-0.10	0.24	0.58	0.75	0.92
	5	-0.40	-2.58	-1.75	-0.81	-0.37	-0.16	0.01	0.26	0.54	0.69	0.88
	6	-2.45	-1.67	-1.16	-0.53	-0.22	-0.07	0.06	0.26	0.52	0.66	0.85
	7	-1.70	-1.21	-0.85	-0.40	-0.15	-0.02	0.09	0.26	0.50	0.65	0.86
	8	-1.30	-0.92	-0.66	-0.30	-0.11	0.00	0.10	0.26	0.50	0.65	0.86
	9	-1.06	-0.76	-0.54	-0.25	-0.08	0.02	0.11	0.26	0.50	0.65	0.86
	10	-0.87	-0.63	-0.46	-0.21	-0.06	0.03	0.12	0.27	0.50	0.65	0.86
	11	-0.75	-0.55	-0.42	-0.19	-0.05	0.03	0.12	0.27	0.50	0.65	0.85
12	3	-19.08	-11.23	-6.92	-3.03	-1.58	-0.97	-0.49	0.10	0.64	0.88	1.10
	4	-7.44	-4.81	-3.17	-1.47	-0.74	-0.40	-0.14	0.21	0.58	0.75	0.92
	5	-4.17	-2.72	-1.88	-0.89	-0.42	-0.20	-0.01	0.24	0.53	0.68	0.84
	6	-2.63	-1.83	-1.27	-0.60	-0.26	-0.10	-0.05	0.25	0.50	0.64	0.81
	7	-1.91	-1.32	-0.92	-0.42	-0.17	-0.04	0.08	0.25	0.48	0.62	0.80
	8	-1.41	-1.00	-0.71	-0.33	-0.12	-0.01	0.09	0.25	0.48	0.62	0.79
	9	-1.15	-0.80	-0.58	-0.27	-0.09	0.01	0.10	0.25	0.47	0.62	0.80
	10	-0.91	-0.67	-0.48	-0.23	-0.07	0.02	0.11	0.25	0.47	0.62	0.80
	11	-0.78	-0.58	-0.43	-0.20	-0.06	0.03	0.11	0.25	0.47	0.62	0.80
	12	-0.69	-0.53	-0.39	-0.19	-0.05	0.03	0.11	0.25	0.47	0.62	0.79

附表 B.7 超几何分布单侧置信下限表

N=300 r=1								
n/γ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
30	0.945 7	0.935 3	0.922 8	0.906 5	0.895 5	0.880 8	0.857 0	0.806 7
32	0.949 1	0.939 4	0.927 7	0.912 4	0.902 1	0.888 2	0.865 8	0.818 2
35	0.953 5	0.944 6	0.934 0	0.920 0	0.910 5	0.897 8	0.877 2	0.833 4
40	0.959 4	0.951 7	0.942 4	0.930 1	0.921 9	0.910 7	0.892 6	0.853 9
45	0.964 0	0.957 2	0.948 9	0.938 1	0.930 8	0.920 9	0.904 7	0.870 2
50	0.967 7	0.961 6	0.954 2	0.944 5	0.937 9	0.929 0	0.914 5	0.883 3
55	0.970 7	0.965 2	0.958 5	0.949 8	0.438 0	0.935 8	0.922 6	0.894 2
59	0.972 8	0.967 6	0.961 5	0.953 4	0.947 8	0.940 4	0.928 1	0.901 7
65	0.975 4	0.970 8	0.965 2	0.957 9	0.953 0	0.946 2	0.935 2	0.911 3
70	0.977 2	0.973 0	0.967 8	0.961 1	0.956 6	0.950 3	0.940 2	0.918 0
75	0.978 8	0.974 9	0.970 2	0.963 9	0.959 7	0.953 9	0.944 5	0.924 0
80	0.980 2	0.976 6	0.972 1	0.966 4	0.962 4	0.957 1	0.948 3	0.929 2
85	0.981 4	0.978 0	0.973 9	0.968 5	0.964 8	0.959 9	0.951 6	0.933 8
90	0.982 5	0.979 3	0.975 5	0.970 5	0.967 0	0.963 0	0.954 6	0.937 9
95	0.983 5	0.980 5	0.977 0	0.972 1	0.968 9	0.964 5	0.957 4	0.941 6
100	0.984 3	0.981 5	0.978 2	0.973 8	0.970 7	0.966 7	0.959 9	0.944 9
120	0.987 2	0.984 9	0.982 2	0.978 6	0.976 3	0.973 0	0.967 5	0.955 7
125	0.987 7	0.985 6	0.983 1	0.979 7	0.977 4	0.974 2	0.969 1	0.957 8
140	0.989 1	0.987 3	0.985 1	0.982 2	0.980 3	0.977 6	0.973 3	0.963 6
150	0.990 0	0.988 2	0.986 4	0.983 7	0.981 8	0.979 5	0.975 4	0.966 8
160	0.990 6	0.989 1	0.987 3	0.984 9	0.983 4	0.981 0	0.977 4	0.969 5
180	0.991 7	0.990 6	0.989 0	0.987 1	0.985 7	0.983 9	0.980 8	0.974 1
200	0.992 7	0.991 6	0.990 5	0.988 7	0.987 6	0.986 2	0.983 6	0.977 8
220	0.993 6	0.992 6	0.991 5	0.990 3	0.989 3	0.987 8	0.985 9	0.981 1
230	0.993 8	0.993 2	0.992	0.990 8	0.990 2	0.988 7	0.987	0.982 8
240	0.994 1	0.993 5	0.992 6	0.991 3	0.990 6	0.988 9	0.987 7	0.984 0
250	0.994 3	0.993 8	0.993 2	0.991 8	0.991 1	0.990 4	0.887 0	0.985 2
260	0.994 4	0.994 0	0.993 6	0.992 5	0.991 7	0.990 9	0.990 0	0.986 8
280	0.994 8	0.994 4	0.994 0	0.993 6	0.993 4	0.992 5	0.991 1	0.989 4

附表 B.8 泊松分布均值的置信区间

X	$1-\alpha=0.95$		$1-\alpha=0.99$		X	$1-\alpha=0.95$		$1-\alpha=0.99$	
0	0	3.285	0	4.771	41	28.97	54.99	25.99	60.39
1	0.051	5.323	0.01	6.914	42	30.02	55.51	27.72	60.59
2	0.355	6.686	0.149	8.727	43	31.67	56.99	27.72	62.13
3	0.818	8.102	0.436	10.473	44	31.67	58.72	28.85	63.63
4	1.366	9.598	0.823	12.347	45	32.28	58.84	29.9	64.26
5	0.97	11.177	1.273	13.793	46	34.05	60.24	29.9	65.96
6	2.613	12.817	1.785	15.277	47	34.66	61.9	31.84	66.81
7	3.285	13.765	2.33	16.801	48	34.66	62.81	31.84	67.92
8	3.285	14.921	2.906	18.362	49	36.03	63.49	32.55	69.83
9	4.46	16.768	3.507	19.462	50	37.67	64.95	34.18	70.05
10	5.323	17.633	4.13	20.676	51	37.67	66.76	34.18	71.56
11	5.323	19.05	4.771	22.042	52	38.16	66.76	35.2	73.2
12	6.686	20.335	4.771	23.765	53	39.76	68.1	36.54	73.62
13	6.686	21.364	5.829	24.925	54	40.94	69.62	36.54	75.16
14	8.102	22.945	6.668	25.992	55	40.94	71.09	37.82	76.61
15	8.102	23.762	6.914	27.718	56	41.75	71.28	38.94	77.15
16	9.598	25.4	7.756	28.852	57	43.45	72.66	40.37	78.71
17	9.598	26.306	8.727	29.9	58	44.26	74.22	41.39	80.06
18	11.177	27.735	8.727	31.839	59	44.26	75.49	41.39	80.65
19	11.177	28.966	10.009	32.547	60	46.28	75.78	41.39	82.21
20	12.817	30.017	10.473	34.183	61	47.02	77.16	42.85	83.56
21	12.817	31.675	11.242	35.204	62	47.69	78.73	43.91	84.12
22	13.765	32.277	12.347	36.544	63	47.69	79.98	43.91	85.65
23	14.921	34.048	12.347	37.819	64	48.74	80.25	45.26	87.12
24	14.921	34.665	13.793	38.939	65	50.42	81.61	46.5	87.55
25	16.768	36.03	13.793	40.373	66	51.29	83.14	46.5	89.05
26	16.77	37.67	15.28	41.39	67	51.29	84.57	47.62	90.72
27	17.63	38.16	15.28	42.85	68	52.15	84.67	49.13	90.96
28	19.05	39.76	16.8	43.91	69	53.72	86.01	49.13	92.42
29	19.05	40.94	16.8	45.26	70	54.99	87.48	49.96	94.34

X	$1-\alpha=0.95$		$1-\alpha=0.99$		X	$1-\alpha=0.95$		$1-\alpha=0.99$	
30	20.33	41.75	18.36	46.5	71	54.99	89.23	51.78	94.35
31	21.36	43.45	18.36	47.62	72	55.51	89.23	51.78	95.76
32	21.36	44.26	19.46	49.13	73	56.99	90.37	52.28	97.42
33	22.94	45.28	20.28	49.96	74	58.72	91.78	54.03	98.36
34	23.76	47.02	20.68	51.78	75	58.72	93.48	54.74	99.09
35	23.76	47.69	22.04	52.28	76	58.84	94.23	54.74	100.61
36	25.4	48.74	22.04	54.03	77	60.24	94.7	56.14	102.16
37	26.31	50.42	23.76	54.74	78	61.9	96.06	57.61	102.42
38	26.31	51.29	23.76	56.14	79	62.81	97.54	57.61	103.84
39	27.73	52.15	24.92	57.61	80	62.81	99.17	58.35	105.66
40	28.97	53.72	25.83	58.35					

附表 B.9 柯尔莫哥洛夫检验的临界值表

(a) 检验的临界值($d_{n,\alpha}$)表

$n \backslash \alpha$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
1	0.900 00	0.950 00	0.975 00	0.990 00	0.995 00
2	0.683 77	0.776 39	0.841 89	0.900 00	0.929 29
3	0.564 81	0.636 04	0.707 60	0.784 56	0.829 00
4	0.492 65	0.565 22	0.623 94	0.688 87	0.734 24
5	0.446 98	0.509 45	0.563 28	0.627 18	0.668 53
6	0.410 37	0.467 99	0.519 26	0.577 41	0.616 61
7	0.381 48	0.436 07	0.483 42	0.538 44	0.575 81
8	0.358 31	0.409 62	0.454 27	0.506 54	0.541 79
9	0.339 10	0.387 46	0.430 01	0.479 60	0.513 32
10	0.322 60	0.368 66	0.409 25	0.456 62	0.488 93
11	0.308 29	0.352 42	0.391 22	0.436 70	0.467 70
12	0.295 77	0.338 15	0.375 43	0.419 18	0.449 05
13	0.284 70	0.325 49	0.361 43	0.403 62	0.432 47
14	0.274 81	0.314 17	0.348 90	0.389 70	0.417 62
15	0.265 88	0.303 97	0.337 60	0.377 13	0.404 20
16	0.257 78	0.294 72	0.327 33	0.365 71	0.392 01

续附表 B. 9(a)

$\alpha \backslash n$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
17	0.250 39	0.286 27	0.317 96	0.355 28	0.380 86
18	0.243 60	0.278 51	0.309 36	0.345 69	0.370 62
19	0.237 35	0.271 36	0.336 85	0.336 85	0.361 17
20	0.231 56	0.264 73	0.328 66	0.328 66	0.352 41
21	0.226 17	0.258 58	0.321 04	0.321 04	0.344 27
22	0.221 15	0.252 83	0.313 94	0.313 94	0.336 66
23	0.216 45	0.247 46	0.307 28	0.307 28	0.329 54
24	0.212 05	0.242 42	0.301 04	0.301 04	0.322 86
25	0.207 90	0.237 68	0.295 16	0.295 16	0.316 57
26	0.203 99	0.233 20	0.259 07	0.289 62	0.310 64
27	0.200 30	0.228 98	0.254 38	0.284 38	0.305 02
28	0.196 80	0.224 97	0.249 93	0.279 42	0.299 71
29	0.193 48	0.221 17	0.245 71	0.274 71	0.294 66
30	0.190 32	0.217 56	0.241 70	0.270 23	0.289 87
31	0.187 32	0.214 12	0.237 88	0.265 96	0.285 30
32	0.184 45	0.210 85	0.234 24	0.261 89	0.280 94
33	0.181 71	0.207 71	0.230 76	0.258 01	0.276 77
34	0.179 09	0.204 72	0.227 43	0.254 29	0.272 79
35	0.176 59	0.201 85	0.224 25	0.250 73	0.268 97
36	0.174 18	0.199 10	0.221 19	0.247 32	0.265 32
37	0.171 88	0.196 46	0.218 26	0.244 04	0.261 80
38	0.169 66	0.193 92	0.215 44	0.240 89	0.258 43
39	0.167 53	0.191 48	0.212 73	0.237 86	0.255 18
40	0.165 47	0.189 13	0.210 12	0.234 94	0.252 05
41	0.163 49	0.186 87	0.207 60	0.232 13	0.249 04
42	0.161 58	0.184 68	0.205 17	0.229 41	0.246 13
43	0.159 74	0.182 57	0.202 83	0.226 79	0.243 32
44	0.157 96	0.180 53	0.200 56	0.224 26	0.240 60
45	0.156 23	0.178 56	0.198 37	0.221 81	0.237 98
46	0.154 57	0.176 65	0.196 25	0.219 44	0.235 44

续附表 B. 9(a)

$\alpha \backslash n$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
47	0.152 95	0.174 81	0.194 20	0.217 15	0.232 98
48	0.151 39	0.173 02	0.192 21	0.214 93	0.230 59
49	0.149 87	0.171 28	0.190 28	0.212 77	0.228 28
50	0.148 40	0.169 59	0.188 41	0.210 68	0.226 04
55	0.141 64	0.161 86	0.179 81	0.201 07	0.215 74
60	0.135 73	0.155 11	0.172 31	0.192 67	0.206 73
65	0.130 52	0.149 13	0.165 67	0.185 25	0.198 77
70	0.125 86	0.143 81	0.159 75	0.178 63	0.191 67
75	0.121 67	0.139 01	0.154 42	0.172 68	0.185 28
80	0.117 87	0.134 67	0.149 60	0.167 28	0.179 49
85	0.114 42	0.130 72	0.145 20	0.162 36	0.174 21
90	0.111 25	0.127 09	0.141 17	0.157 86	0.169 38
95	0.108 33	0.123 75	0.137 46	0.153 71	0.164 93
100	0.105 63	0.120 67	0.134 03	0.149 87	0.160 81

(b) 定数截尾寿命试验临界值表

 $n=5$

$k \backslash r$	1	2	3	4	5
1	0.672 32	0.922 24	0.989 76	0.999 67	0.999 99
2	0.280 00	0.871 04	0.984 96	0.999 68	1.000 00
3	0.121 60	0.787 52	0.964 96	0.999 68	1.000 00
4	0.057 60	0.729 60	0.978 24	0.999 68	1.000 00
5	0.038 40	0.691 20	0.969 92	0.999 36	1.000 00

 $n=10$

$k \backslash r$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.651 32	0.999 89	0.892 62	0.999 99	0.971 75	1.000	0.993 95	1.000	0.999 02	1.000
2	0.253 20	0.999 77	0.811 92	0.999 99	0.941 52	1.000	0.986 14	1.000	0.997 71	1.000

$n=10$

$\begin{smallmatrix} k \\ r \end{smallmatrix}$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
3	0.099 11	0.999 72	0.681 26	0.999 99	0.915 15	1.000	0.979 06	1.000	0.996 68	1.000
4	0.039 14	0.999 71	0.559 47	0.999 99	0.881 12	1.000	0.973 92	1.000	0.996 18	1.000
5	0.015 64	0.999 71	0.461 68	0.999 99	0.839 88	1.000	0.969 53	1.000	0.996 11	1.000
6	0.006 35	0.999 71	0.385 56	0.999 99	0.802 82	1.000	0.963 31	1.000	0.995 96	1.000
7	0.002 65	0.999 70	0.328 27	0.999 99	0.774 38	1.000	0.955 96	1.000	0.995 16	1.000
8	0.001 15	0.999 63	0.288 42	0.999 99	0.753 68	1.000	0.948 95	1.000	0.993 91	1.000
9	0.000 54	0.999 51	0.265 63	0.999 98	0.738 21	1.000	0.943 68	1.000	0.992 79	1.000
10	0.000 36	0.999 43	0.251 28	0.999 98	0.729 46	1.000	0.941 01	1.000	0.992 22	1.000

 $n=15$

$\begin{smallmatrix} k \\ r \end{smallmatrix}$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.644 73	0.999 52	0.883 10	0.999 91	0.964 81	0.999 98	0.990 45	0.999 99	0.997 71	0.999 99
2	0.245 76	0.998 62	0.795 14	0.999 75	0.925 78	0.999 96	0.976 75	0.999 99	0.993 79	0.999 99
3	0.093 94	0.997 50	0.655 14	0.999 55	0.889 82	0.999 93	0.962 12	0.999 98	0.989 18	0.999 99
4	0.036 02	0.996 40	0.524 60	0.999 37	0.843 26	0.999 92	0.948 13	0.999 98	0.984 57	0.999 99
5	0.013 86	0.995 49	0.419 16	0.999 25	0.785 20	0.999 91	0.933 26	0.999 98	0.980 45	0.999 99
6	0.005 36	0.994 86	0.335 62	0.999 19	0.727 83	0.999 91	0.914 12	0.999 98	0.976 84	0.999 99
7	0.002 08	0.994 50	0.269 85	0.999 18	0.675 30	0.999 91	0.893 08	0.999 99	0.972 77	0.999 99
8	0.000 82	0.994 13	0.218 22	0.999 17	0.628 79	0.999 91	0.872 70	0.999 98	0.968 10	0.999 99
9	0.000 32	0.993 47	0.177 79	0.999 14	0.588 61	0.999 91	0.854 55	0.999 99	0.963 31	0.999 99
10	0.000 13	0.992 50	0.146 31	0.999 05	0.554 94	0.999 91	0.839 46	0.999 99	0.958 70	0.999 99
11	0.000 05	0.991 40	0.122 06	0.998 88	0.528 06	0.999 90	0.827 55	0.999 99	0.954 38	0.999 99
12	0.000 02	0.990 35	0.103 88	0.998 69	0.508 27	0.999 88	0.817 93	0.999 99	0.950 64	0.999 99
13	0.000 01	0.989 53	0.091 25	0.998 52	0.494 15	0.999 86	0.810 38	0.999 99	0.947 77	0.999 99
14	0.000 00	0.989 02	0.084 04	0.998 41	0.482 77	0.999 84	0.805 23	0.999 99	0.945 94	1.000 00
15	0.000 00	0.988 82	0.079 50	0.998 37	0.477 95	0.999 83	0.802 75	0.999 99	0.945 17	1.000 00

$n=20$

$\begin{smallmatrix} k \\ r \end{smallmatrix}$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.641 51	0.999 19	0.878 42	0.999 80	0.961 23	0.999 94	0.988 46	0.999 97	0.996 81	0.999 98
2	0.242 27	0.997 51	0.787 22	0.999 37	0.917 99	0.999 85	0.971 55	0.999 96	0.991 12	0.999 98
3	0.091 63	0.995 20	0.643 28	0.998 74	0.877 83	0.999 71	0.952 98	0.999 93	0.983 98	0.999 97
4	0.034 71	0.992 53	0.509 56	0.997 98	0.826 12	0.999 53	0.934 55	0.999 90	0.978 27	0.999 97
5	0.018 17	0.989 75	0.402 00	0.997 18	0.761 63	0.999 35	0.914 43	0.999 87	0.963 53	0.999 96
6	0.008 01	0.987 08	0.312 10	0.996 43	0.697 32	0.999 19	0.893 35	0.999 84	0.960 00	0.999 96
7	0.001 91	0.984 62	0.250 53	0.995 77	0.637 57	0.999 06	0.859 35	0.999 83	0.951 80	0.999 96
8	0.000 73	0.982 15	0.198 36	0.995 26	0.583 34	0.998 98	0.829 44	0.999 82	0.941 23	0.999 96
9	0.000 28	0.979 40	0.157 48	0.994 85	0.584 68	0.998 94	0.800 48	0.999 82	0.929 96	0.999 96
10	0.000 11	0.976 41	0.125 44	0.994 43	0.491 30	0.998 92	0.773 37	0.999 82	0.918 63	0.999 96
11	0.000 04	0.973 33	0.100 32	0.993 92	0.452 87	0.998 88	0.748 59	0.999 82	0.907 89	0.999 96
12	0.000 02	0.970 33	0.080 63	0.993 29	0.419 06	0.998 80	0.726 46	0.999 81	0.898 18	0.999 96
13	0.000 01	0.967 51	0.065 19	0.992 55	0.389 64	0.998 67	0.707 20	0.999 80	0.889 76	0.999 96
14	0.000 00	0.964 88	0.053 11	0.991 77	0.364 43	0.998 50	0.691 00	0.999 78	0.882 63	0.999 96
15	0.000 00	0.962 51	0.043 70	0.991 01	0.343 40	0.998 33	0.677 95	0.999 75	0.876 80	0.999 96
16	0.000 00	0.960 49	0.036 46	0.990 36	0.326 65	0.998 15	0.667 83	0.999 72	0.871 84	0.999 96
17	0.000 00	0.958 90	0.031 03	0.989 84	0.314 34	0.998 03	0.659 79	0.999 70	0.867 85	0.999 96
18	0.000 00	0.957 80	0.027 26	0.989 49	0.997 94	0.997 94	0.653 54	0.999 68	0.864 93	0.999 96
19	0.000 00	0.957 16	0.025 10	0.989 30	0.997 89	0.997 89	0.649 31	0.999 67	0.863 12	0.999 96
20	0.000 00	0.956 93	0.023 74	0.989 24	0.997 87	0.997 87	0.647 28	0.999 67	0.862 37	0.999 96

 $n=25$

$\begin{smallmatrix} k \\ r \end{smallmatrix}$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.639 60	0.998 93	0.875 63	0.999 70	0.959 06	0.999 91	0.987 19	0.999 96	0.996 20	0.999 97
2	0.240 23	0.996 67	0.782 60	0.999 03	0.913 37	0.999 73	0.968 30	0.999 91	0.989 31	0.999 96
3	0.090 31	0.993 43	0.636 50	0.997 98	0.870 87	0.999 43	0.947 40	0.999 84	0.980 52	0.999 94
4	0.033 99	0.989 54	0.501 16	0.996 63	0.816 39	0.999 02	0.926 44	0.999 73	0.970 79	0.999 92
5	0.012 80	0.985 28	0.392 69	0.995 07	0.748 56	0.998 53	0.903 51	0.999 60	0.960 75	0.999 89
6	0.004 83	0.980 88	0.307 42	0.993 42	0.680 88	0.998 01	0.873 99	0.999 46	0.950 43	0.999 85

$\begin{matrix} k \\ r \end{matrix}$	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
7	0.001 82	0.976 49	0.240 78	0.991 77	0.617 85	0.997 48	0.840 46	0.999 33	0.938 29	0.999 83
8	0.000 69	0.971 81	0.188 78	0.990 18	0.560 49	0.996 99	0.805 79	0.999 20	0.923 97	0.999 80
9	0.000 26	0.966 52	0.148 22	0.988 64	0.508 76	0.996 55	0.771 66	0.99910	0.908 20	0.999 79
10	0.000 10	0.960 60	0.116 56	0.987 04	0.462 31	0.996 18	0.738 93	0.999 03	0.891 81	0.999 78
11	0.000 04	0.954 28	0.091 84	0.985 32	0.420 71	0.995 84	0.708 06	0.998 97	0.875 46	0.999 77
12	0.000 01	0.947 85	0.072 52	0.983 48	0.383 52	0.995 50	0.679 24	0.998 93	0.859 63	0.999 77
13	0.000 01	0.941 55	0.057 40	0.981 58	0.350 34	0.995 13	0.652 56	0.998 90	0.844 65	0.999 77
14	0.000 00	0.935 60	0.045 57	0.979 69	0.320 81	0.994 70	0.628 08	0.998 83	0.830 78	0.999 76
15	0.000 00	0.930 14	0.036 30	0.977 86	0.294 61	0.994 23	0.605 82	0.998 74	0.818 18	0.999 75
16	0.000 00	0.925 28	0.029 03	0.976 13	0.271 46	0.993 73	0.585 82	0.998 63	0.806 99	0.999 74
17	0.000 00	0.921 04	0.023 33	0.974 52	0.251 13	0.993 20	0.568 13	0.998 50	0.797 29	0.999 71
18	0.000 00	0.917 38	0.018 86	0.973 03	0.233 46	0.992 70	0.552 83	0.998 36	0.789 11	0.999 69
19	0.000 00	0.914 23	0.015 37	0.971 71	0.218 33	0.992 24	0.540 00	0.998 24	0.782 38	0.999 66
20	0.000 00	0.911 53	0.012 65	0.970 59	0.205 72	0.991 84	0.529 69	0.998 12	0.776 86	0.999 64
21	0.000 00	0.909 33	0.010 55	0.969 68	0.195 68	0.991 53	0.521 70	0.998 03	0.772 29	0.999 62
22	0.000 00	0.907 66	0.008 98	0.969 03	0.188 30	0.991 31	0.515 36	0.997 97	0.768 64	0.999 60
23	0.000 00	0.906 25	0.007 89	0.968 61	0.183 04	0.991 18	0.510 45	0.997 93	0.765 98	0.999 59
24	0.000 00	0.905 87	0.007 26	0.968 39	0.179 18	0.991 11	0.507 13	0.997 92	0.764 35	0.999 59
25	0.000 00	0.905 64	0.006 87	0.968 32	0.177 02	0.991 09	0.505 53	0.997 91	0.763 67	0.999 59

(c) 定时截尾寿命试验临界值表

R_c	1	2	3	4	5
1	0.409 60	0.942 08	0.993 28	0.999 68	1.000 00
2	0.172 80	0.806 40	0.984 96	0.999 68	1.000 00
3	0.076 80	0.716 80	0.974 72	0.999 68	1.000 00
4	0.038 40	0.691 20	0.969 92	0.999 36	1.000 00
5	0.038 40	0.691 20	0.969 92	0.999 36	1.000 00

$n=10$

R_c	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.387 42	0.999 99	0.929 81	1.000 00	0.987 20	1.000 00	0.998 36	1.000 00	0.999 85	1.000 00
2	0.150 99	0.999 91	0.746 58	0.999 99	0.961 70	1.000 00	0.992 80	1.000 00	0.999 05	1.000 00
3	0.059 30	0.999 79	0.602 83	0.999 99	0.906 26	1.000 00	0.985 45	1.000 00	0.997 80	1.000 00
4	0.023 51	0.999 71	0.491 85	0.999 99	0.851 26	1.000 00	0.972 40	1.000 00	0.996 68	1.000 00
5	0.009 45	0.999 71	0.406 09	0.999 99	0.804 19	1.000 00	0.959 32	1.000 00	0.995 13	1.000 00
6	0.003 87	0.999 61	0.340 54	0.999 99	0.767 48	1.000 00	0.949 57	1.000 00	0.993 82	1.000 00
7	0.001 63	0.999 49	0.292 15	0.999 98	0.743 00	1.000 00	0.944 42	1.000 00	0.992 79	1.000 00
8	0.000 73	0.999 44	0.260 34	0.999 98	0.733 14	1.000 00	0.941 67	1.000 00	0.992 30	1.000 00
9	0.000 36	0.999 43	0.251 28	0.999 98	0.729 46	1.000 00	0.941 01	1.000 00	0.992 22	1.000 00
10	0.000 36	0.999 43	0.251 28	0.999 98	0.729 46	1.000 00	0.941 01	1.000 00	0.992 22	1.000 00

 $n=15$

R_c	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.380 64	0.999 97	0.926 22	0.999 99	0.985 13	1.000 00	0.997 75	1.000 00	0.999 74	1.000 00
2	0.145 25	0.999 72	0.729 70	0.999 96	0.954 60	0.999 99	0.989 49	0.999 99	0.998 07	0.999 99
3	0.055 59	0.999 06	0.575 82	0.999 86	0.885 73	0.999 98	0.977 38	0.999 99	0.994 84	0.999 99
4	0.021 34	0.998 09	0.456 84	0.999 70	0.814 33	0.999 96	0.954 28	0.999 99	0.990 64	0.999 99
5	0.008 23	0.996 99	0.364 13	0.999 50	0.748 65	0.999 94	0.927 02	0.999 99	0.983 83	1.000 00
6	0.003 19	0.995 47	0.291 60	0.999 33	0.690 25	0.999 92	0.899 68	0.999 99	0.975 59	0.999 99
7	0.001 24	0.993 75	0.234 77	0.999 14	0.639 10	0.999 91	0.874 33	0.999 99	0.967 24	0.999 99
8	0.000 49	0.992 12	0.190 26	0.998 94	0.594 86	0.999 90	0.852 09	0.999 99	0.959 77	0.999 99
9	0.000 19	0.990 82	0.155 46	0.998 74	0.557 30	0.999 88	0.833 66	0.999 99	0.953 82	1.000 00
10	0.000 08	0.989 91	0.128 43	0.998 56	0.526 39	0.999 86	0.819 58	0.999 99	0.949 69	1.000 00
11	0.000 03	0.989 27	0.107 72	0.998 44	0.502 53	0.999 84	0.810 28	0.999 99	0.947 28	0.999 99
12	0.000 01	0.988 94	0.092 42	0.998 38	0.486 66	0.999 83	0.805 68	0.999 99	0.945 84	0.999 99
13	0.000 01	0.988 83	0.082 36	0.998 37	0.480 32	0.999 83	0.803 31	0.999 99	0.945 25	1.000 00
14	0.000 00	0.988 82	0.079 50	0.998 37	0.477 95	0.999 83	0.802 75	0.999 99	0.945 17	1.000 00
15	0.000 00	0.988 82	0.079 50	0.998 37	0.477 95	0.999 83	0.802 75	0.999 99	0.945 17	1.000 00

$n=20$

R_c	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.377 35	0.999 96	0.924 51	0.999 99	0.984 09	0.999 99	0.997 42	0.999 99	0.999 66	0.999 99
2	0.142 59	0.999 56	0.721 70	0.999 93	0.951 21	0.999 98	0.987 74	0.999 99	0.997 47	0.999 99
3	0.053 96	0.998 47	0.563 60	0.999 71	0.876 02	0.999 95	0.973 28	0.999 99	0.993 02	0.999 99
4	0.020 46	0.996 68	0.441 91	0.999 29	0.795 75	0.999 87	0.945 14	0.999 97	0.986 92	0.999 99
5	0.007 77	0.994 36	0.347 49	0.998 67	0.724 80	0.999 74	0.911 08	0.999 95	0.976 69	0.999 99
6	0.002 96	0.990 95	0.273 92	0.997 94	0.659 32	0.999 57	0.875 68	0.999 92	0.963 56	0.999 98
7	0.001 13	0.986 57	0.216 45	0.996 97	0.600 93	0.999 30	0.841 20	0.999 89	0.949 03	0.999 98
8	0.000 43	0.981 64	0.171 50	0.995 79	0.549 02	0.999 19	0.808 69	0.999 86	0.934 23	0.999 97
9	0.000 17	0.976 59	0.136 30	0.994 50	0.502 95	0.998 96	0.778 66	0.999 84	0.919 97	0.999 97
10	0.000 06	0.971 80	0.108 71	0.993 22	0.462 19	0.998 72	0.751 33	0.999 81	0.906 77	0.999 97
11	0.000 02	0.967 54	0.087 08	0.992 07	0.426 28	0.998 50	0.726 87	0.999 78	0.895 00	0.999 97
12	0.000 01	0.964 00	0.070 12	0.991 12	0.394 84	0.998 30	0.705 40	0.999 75	0.884 94	0.999 97
13	0.000 00	0.961 29	0.056 83	0.990 41	0.367 62	0.998 14	0.687 06	0.999 72	0.876 80	0.999 96
14	0.000 00	0.959 40	0.046 43	0.989 90	0.344 48	0.998 02	0.672 09	0.999 69	0.870 70	0.999 96
15	0.000 00	0.958 20	0.038 36	0.989 55	0.325 42	0.997 94	0.660 73	0.999 68	0.866 65	0.999 96
16	0.000 00	0.957 44	0.032 18	0.989 35	0.310 70	0.997 89	0.653 28	0.999 67	0.864 34	0.999 96
17	0.000 00	0.957 05	0.027 61	0.989 26	0.300 91	0.997 88	0.649 62	0.999 67	0.862 99	0.999 95
18	0.000 00	0.959 64	0.024 60	0.989 24	0.297 00	0.997 87	0.647 72	0.999 67	0.862 45	0.999 96
19	0.000 00	0.956 93	0.023 74	0.989 24	0.295 53	0.997 87	0.647 28	0.999 67	0.862 37	0.999 96
20	0.000 00	0.956 93	0.023 74	0.989 24	0.295 53	0.997 87	0.647 28	0.999 67	0.862 37	0.999 96

 $n=25$

R_c	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
1	0.375 41	0.999 95	0.923 51	0.999 99	0.983 47	0.999 99	0.997 21	0.999 99	0.999 62	0.999 99
2	0.141 05	0.999 45	0.717 03	0.999 91	0.949 23	0.999 98	0.986 67	0.999 99	0.997 07	0.999 99
3	0.053 05	0.998 04	0.556 63	0.999 59	0.870 36	0.999 92	0.970 82	0.999 98	0.991 84	0.999 99
4	0.019 97	0.995 66	0.433 62	0.998 94	0.787 99	0.999 77	0.939 71	0.999 95	0.984 55	0.999 98
5	0.007 53	0.992 47	0.338 53	0.997 95	0.711 53	0.999 51	0.901 75	0.999 89	0.972 18	0.999 97
6	0.002 84	0.987 66	0.264 73	0.996 68	0.642 63	0.999 15	0.861 93	0.999 81	0.956 00	0.999 96
7	0.001 07	0.981 29	0.207 31	0.994 92	0.581 04	0.998 70	0.822 69	0.999 69	0.937 69	0.999 93

R_c	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
8	0.000 41	0.973 79	0.162 59	0.992 65	0.526 09	0.998 13	0.785 13	0.999 56	0.918 49	0.999 90
9	0.000 15	0.965 65	0.127 72	0.989 97	0.477 06	0.997 43	0.749 74	0.999 41	0.899 24	0.999 87
10	0.000 06	0.957 27	0.100 50	0.987 02	0.433 33	0.996 62	0.716 69	0.999 23	0.880 51	0.999 84
11	0.000 02	0.949 01	0.079 25	0.983 98	0.394 32	0.995 74	0.686 02	0.999 04	0.862 65	0.999 81
12	0.000 01	0.941 11	0.062 63	0.981 00	0.359 56	0.994 86	0.657 70	0.998 84	0.845 90	0.999 78
13	0.000 00	0.933 79	0.049 62	0.978 22	0.328 61	0.994 02	0.631 72	0.998 64	0.830 43	0.999 74
14	0.000 00	0.927 20	0.039 44	0.975 74	0.301 12	0.993 27	0.608 03	0.998 46	0.816 38	0.999 71
15	0.000 00	0.921 46	0.031 46	0.973 62	0.276 76	0.992 64	0.586 63	0.998 31	0.803 86	0.999 68
16	0.000 00	0.916 66	0.025 20	0.971 91	0.255 29	0.992 14	0.567 53	0.998 18	0.792 98	0.999 65
17	0.000 00	0.912 85	0.020 29	0.970 62	0.236 48	0.991 76	0.550 79	0.998 08	0.783 82	0.999 63
18	0.000 00	0.910 01	0.016 44	0.969 69	0.220 19	0.991 48	0.536 51	0.998 00	0.776 49	0.999 61
19	0.000 00	0.908 09	0.013 44	0.969 07	0.206 33	0.991 29	0.524 84	0.997 95	0.771 05	0.999 60
20	0.000 00	0.906 88	0.011 10	0.968 66	0.194 92	0.991 17	0.516 00	0.997 93	0.767 45	0.999 59
21	0.000 00	0.906 13	0.009 31	0.968 43	0.186 11	0.991 11	0.510 20	0.997 91	0.765 41	0.999 59
22	0.000 00	0.905 76	0.007 99	0.968 34	0.180 24	0.991 09	0.507 36	0.997 91	0.764 22	0.999 59
23	0.000 00	0.905 65	0.007 12	0.968 32	0.177 90	0.991 09	0.505 88	0.997 91	0.763 74	0.999 59
24	0.000 00	0.905 64	0.006 87	0.968 32	0.177 02	0.991 09	0.505 53	0.997 91	0.763 67	0.999 59
25	0.000 00	0.905 64	0.006 87	0.968 32	0.177 02	0.991 09	0.505 53	0.997 91	0.763 67	0.999 59

(d) 截尾寿命试验中 $D_{n,T}$ 的极限分布

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n}D_{n,T} < d] = G_T(d)$$

$G_T(d)$	$F(T)$									
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0.010	0.158 7	0.223 2	0.271 7	0.311 5	0.345 4	0.374 7	0.399 9	0.420 9	0.436 2	0.441 0
0.025	0.176 1	0.247 3	0.300 6	0.344 1	0.381 0	0.412 5	0.439 4	0.461 2	0.476 4	0.480 6
0.050	0.193 8	0.271 8	0.329 9	0.377 1	0.416 8	0.450 4	0.478 6	0.501 1	0.516 0	0.519 6
0.100	0.218 2	0.305 4	0.370 0	0.421 9	0.465 2	0.501 4	0.531 1	0.554 0	0.568 3	0.571 2
0.150	0.237 6	0.332 1	0.401 5	0.457 1	0.502 9	0.540 9	0.571 6	0.594 6	0.608 2	0.610 6
0.200	0.255 0	0.355 9	0.429 7	0.488 3	0.536 3	0.575 6	0.606 9	0.630 0	0.642 8	0.644 8
0.250	0.271 6	0.378 5	0.456 2	0.517 6	0.567 5	0.607 9	0.639 8	0.662 6	0.674 8	0.676 4
0.300	0.287 8	0.400 5	0.482 0	0.546 0	0.597 6	0.639 1	0.671 3	0.693 8	0.705 4	0.706 7

续附表 B. 10(d)

秩 i	样本容量 n									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	13.89	17.46	16.23	15.17	14.23	13.40	12.67	12.01	11.41	10.87
2	31.02	28.75	26.78	25.07	23.56	22.22	21.02	19.95	18.98	18.10
3	41.52	38.55	35.98	33.72	31.73	29.96	28.37	26.94	25.65	24.48
4	51.08	47.53	44.43	41.70	39.23	37.12	35.19	33.44	31.86	30.42
5	59.95	55.90	52.34	49.20	46.40	43.89	41.64	39.60	37.75	36.07
6	68.23	63.77	59.82	56.31	53.17	50.35	47.81	45.50	43.40	41.49
7	75.95	71.18	66.91	63.09	59.65	56.54	53.74	51.18	48.86	46.73
8	83.08	78.13	73.63	69.54	65.85	62.50	59.45	56.67	54.13	51.80
9	89.52	84.58	79.95	75.68	71.78	68.22	64.96	61.98	59.25	56.73
10	95.05	90.43	85.84	81.49	77.44	73.71	70.27	67.12	64.21	61.52
11	99.05	95.48	91.20	86.91	82.80	78.96	75.39	72.08	69.02	66.18
12		99.13	95.83	91.85	87.82	83.94	80.28	76.86	73.67	70.71
13			99.19	96.13	92.41	88.62	84.94	81.45	78.13	75.09
14				99.25	96.40	92.90	89.32	85.82	82.49	79.33
15					99.30	96.63	93.33	89.94	86.61	83.41
16						99.34	96.83	93.71	90.49	87.31
17							99.38	97.01	94.05	90.98
18								99.42	97.17	94.36
19									99.45	97.31
20										99.45

附表 B. 11 计算统计量 Z 必需的系数 $\alpha_{k,n}$

$k \backslash n$		3	4	5	6	7	8	9	10	
1		0.707 1	0.687 2	0.664 6	0.643 1	0.623 3	0.605 2	0.588 8	0.573 9	
2		—	0.167 7	0.241 3	0.280 6	0.303 1	0.316 4	0.324 4	0.329 1	
3		—	—	—	0.087 5	0.140 1	0.174 3	0.197 6	0.214 1	
4		—	—	—	—	—	0.056 1	0.094 7	0.124 4	
5		—	—	—	—	—	—	—	0.039 9	
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0.560 1	0.547 5	0.535 9	0.525 1	0.515 0	0.505 6	0.469 8	0.488 6	0.480 8	0.473 4
2	0.331 5	0.332 5	0.332 5	0.331 8	0.330 6	0.329 0	0.327 3	0.325 3	0.323 2	0.321 1
3	0.226 0	0.234 7	0.241 2	0.246 0	0.249 5	0.252 1	0.254 0	0.255 3	0.256 1	0.256 5
4	0.142 9	0.158 6	0.170 7	0.180 2	0.187 8	0.193 9	0.198 8	0.202 7	0.205 9	0.208 5

续附表 B.11

$k \backslash n$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	0.069 5	0.092 2	0.109 9	0.124 0	0.135 3	0.144 7	0.152 4	0.158 7	0.164 1	0.168 6
6	—	0.030 3	0.053 9	0.072 7	0.088 0	0.100 5	0.110 9	0.119 7	0.127 1	0.133 4
7	—	—	—	0.024 0	0.043 3	0.059 3	0.072 5	0.083 7	0.093 2	0.101 3
8	—	—	—	—	—	0.019 6	0.035 9	0.049 6	0.061 2	0.071 1
9	—	—	—	—	—	—	—	0.016 3	0.030 3	0.042 2
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.014 0
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0.464 3	0.459 0	0.454 2	0.449 3	0.445 0	0.440 7	0.436 6	0.432 8	0.429 1	0.425 4
2	0.318 5	0.315 6	0.312 6	0.309 8	0.306 9	0.304 3	0.301 8	0.299 2	0.296 8	0.294 4
3	0.257 8	0.257 1	0.256 3	0.255 4	0.254 3	0.253 3	0.252 2	0.251 0	0.249 9	0.248 7
4	40.211 9	0.213 1	0.213 9	0.214 5	0.214 8	0.215 1	0.215 2	0.215 1	0.215 0	0.214 8
5	0.173 6	0.176 4	0.178 7	0.180 7	0.182 2	0.183 6	0.184 8	0.185 7	0.186 4	0.187 0
6	0.139 9	0.144 3	0.148 0	0.151 2	0.153 9	0.156 3	0.158 4	0.160 1	0.161 6	0.163 0
7	0.109 2	0.115 0	0.120 1	0.124 5	0.128 3	0.131 6	0.134 6	0.137 2	0.139 5	0.141 5
8	0.080 4	0.087 8	0.094 1	0.099 7	0.104 6	0.108 9	0.122 8	0.116 2	0.119 2	0.121 0
9	0.053 0	0.061 8	0.069 6	0.076 4	0.082 3	0.087 6	0.092 3	0.096 5	0.100 2	0.103 6
10	0.026 3	0.036 8	0.045 9	0.053 9	0.061 0	0.067 2	0.072 8	0.077 8	0.082 2	0.086 2
11	—	0.012 2	0.022 8	0.032 1	0.040 3	0.047 6	0.054 0	0.059 8	0.065 0	0.066 7
12	—	—	—	0.010 7	0.020 0	0.028 4	0.035 8	0.042 4	0.048 3	0.053 7
13	—	—	—	—	—	0.009 4	0.017 8	0.025 3	0.032 0	0.038 1
14	—	—	—	—	—	—	—	0.008 4	0.015 9	0.022 7
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.007 6
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0.422 0	0.418 8	0.415 6	0.412 7	0.409 6	0.406 8	0.404 0	0.401 5	0.398 0	0.396 4
2	0.259 1	0.289 8	0.287 6	0.285 4	0.283 4	0.281 3	0.279 4	0.277 4	0.275 5	0.273 7
3	0.247 5	0.246 3	0.245 1	0.243 9	0.242 7	0.241 5	0.240 3	0.239 1	0.238 0	0.236 8
4	0.214 5	0.214 1	0.213 7	0.213 2	0.212 7	0.212 1	0.211 6	0.211 0	0.210 4	0.209 8
5	0.187 4	0.187 8	0.188 0	0.188 2	0.188 3	0.188 3	0.188 3	0.188 1	0.188 0	0.209 8
6	0.164 1	0.165 1	0.166 0	0.166 7	0.167 3	0.167 8	0.168 3	0.168 6	0.168 9	0.169 1
7	0.143 3	0.144 9	0.146 3	0.147 5	0.148 7	0.149 6	0.150 5	0.151 3	0.152 0	0.152 6

续附表 B. 11

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
8	0.124 3	0.126 5	0.128 4	0.130 1	0.131 7	0.133 1	0.134 4	0.135 6	0.136 6	0.137 6
9	0.106 6	0.109 3	0.111 8	0.114 0	0.116 0	0.117 9	0.119 6	0.121 1	0.122 5	0.123 7
10	0.089 9	0.093 1	0.096 1	0.098 8	0.101 3	0.103 6	0.105 6	0.107 5	0.109 2	0.110 8
11	0.073 9	0.077 7	0.081 2	0.084 4	0.087 3	0.090 0	0.092 4	0.094 7	0.096 7	0.098 6
12	0.058 5	0.062 9	0.066 9	0.070 6	0.073 9	0.077 0	0.079 8	0.082 4	0.084 8	0.087 0
13	0.043 5	0.048 5	0.053 0	0.057 2	0.061 0	0.064 5	0.067 7	0.070 6	0.073 3	0.075 9
14	0.028 9	0.034 4	0.039 5	0.044 1	0.048 4	0.052 3	0.055 9	0.059 2	0.062 2	0.065 1
15	0.014 4	0.020 6	0.026 2	0.031 4	0.036 1	0.040 4	0.041 4	0.048 1	0.051 5	0.054 6
16	—	0.006 8	0.013 1	0.018 7	0.023 9	0.028 7	0.033 1	0.037 2	0.040 9	0.044 4
17	—	—	—	0.006 2	0.011 9	0.017 2	0.022 0	0.026 4	0.030 5	0.034 3
18	—	—	—	—	—	0.005 7	0.011 0	0.015 8	0.020 3	0.024 4
19	—	—	—	—	—	—	—	0.005 3	0.010 1	0.014 6
20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.004 9
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	0.394 0	0.391 7	0.389 4	0.387 2	0.385 0	0.383 0	0.380 8	0.378 9	0.377 0	0.375 1
2	0.271 9	0.270 1	0.268 4	0.266 7	0.265 1	0.263 5	0.262 0	0.260 4	0.258 9	0.257 4
3	0.235 7	0.234 5	0.233 4	0.232 3	0.231 3	0.230 2	0.229 1	0.228 1	0.227 1	0.226 0
4	0.209 1	0.208 5	0.207 8	0.207 2	0.206 5	0.205 8	0.205 2	0.204 5	0.203 8	0.203 2
5	0.187 6	0.187 4	0.187 1	0.186 8	0.186 5	0.186 2	0.185 9	0.185 5	0.185 1	0.184 7
6	0.169 3	0.169 4	0.169 5	0.169 5	0.169 5	0.169 5	0.169 5	0.169 3	0.169 2	0.169 1
7	0.153 1	0.153 5	0.153 9	0.154 2	0.154 9	0.154 8	0.155 0	0.155 1	0.155 3	0.155 4
8	0.138 4	0.139 2	0.139 8	0.140 5	0.141 0	0.141 5	0.142 0	0.142 3	0.142 7	0.143 0
9	0.124 9	0.125 9	0.126 9	0.127 8	0.128 6	0.129 3	0.130 0	0.130 6	0.131 2	0.131 7
10	0.112 3	0.113 6	0.114 9	0.116 0	0.117 0	0.118 0	0.118 9	0.119 7	0.120 5	0.121 2
11	0.100 4	0.102 0	0.103 5	0.104 9	0.106 2	0.107 2	0.108 5	0.109 5	0.110 5	0.111 3
12	0.089 1	0.090 9	0.092 7	0.094 3	0.095 9	0.097 2	0.098 6	0.099 8	0.101 0	0.102 0
13	0.078 2	0.080 4	0.082 4	0.084 2	0.086 0	0.087 6	0.089 2	0.090 6	0.091 9	0.093 2
14	0.067 7	0.070 1	0.072 4	0.074 5	0.076 5	0.078 3	0.080 1	0.081 7	0.083 2	0.084 6
15	0.057 5	0.060 2	0.062 8	0.065 1	0.067 3	0.069 4	0.071 3	0.073 1	0.074 8	0.076 4
16	0.047 6	0.050 6	0.053 4	0.056 0	0.058 4	0.060 7	0.062 8	0.064 8	0.066 7	0.068 5
17	0.037 9	0.041 1	0.044 2	0.047 1	0.049 7	0.052 2	0.054 6	0.056 8	0.058 8	0.060 8
18	0.028 8	0.031 8	0.035 2	0.038 3	0.041 2	0.043 9	0.046 5	0.048 9	0.051 1	0.053 2
19	0.018 8	0.022 7	0.026 3	0.029 6	0.032 8	0.035 7	0.038 5	0.041 1	0.043 6	0.045 9

续附表 B.11

$\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
20	0.009 4	0.013 6	0.017 5	0.021 1	0.024 5	0.027 7	0.030 7	0.033 5	0.036 1	0.038 6
21	—	0.004 5	0.008 7	0.012 6	0.016 3	0.019 7	0.022 9	0.025 9	0.028 8	0.031 4
22	—	—	—	0.004 2	0.008 1	0.011 8	0.015 3	0.018 5	0.021 5	0.024 4
23	—	—	—	—	—	0.003 9	0.007 6	0.011 1	0.014 3	0.017 4
24	—	—	—	—	—	—	—	0.003 7	0.007 1	0.010 4
25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.003 5

附表 B.12 统计量 Z 的 p 分位数 Z_p

$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0.01	0.05	0.10	$\begin{matrix} p \\ n \end{matrix}$	0.01	0.05	0.10
3	0.753	0.767	0.789	27	0.894	0.923	0.935
4	0.687	0.748	0.792	28	0.896	0.924	0.936
5	0.686	0.762	0.806	29	0.898	0.926	0.937
6	0.713	0.788	0.826	30	0.900	0.927	0.939
7	0.730	0.803	0.838	31	0.902	0.929	0.940
8	0.749	0.818	0.851	32	0.904	0.930	0.941
9	0.764	0.829	0.859	33	0.906	0.931	0.942
10	0.781	0.842	0.869	34	0.908	0.933	0.943
11	0.792	0.850	0.876	35	0.910	0.934	0.944
12	0.805	0.859	0.883	36	0.912	0.935	0.945
13	0.814	0.866	0.889	37	0.914	0.936	0.946
14	0.825	0.874	0.895	38	0.916	0.938	0.947
15	0.835	0.881	0.901	39	0.917	0.939	0.948
16	0.844	0.887	0.906	40	0.919	0.940	0.949
17	0.851	0.892	0.910	41	0.920	0.941	0.950
18	0.858	0.897	0.914	42	0.922	0.942	0.951
19	0.863	0.901	0.917	43	0.923	0.943	0.951
20	0.868	0.905	0.920	44	0.924	0.944	0.952
21	0.873	0.908	0.923	45	0.926	0.945	0.953
22	0.878	0.911	0.926	46	0.927	0.945	0.953
23	0.881	0.914	0.928	47	0.928	0.946	0.954
24	0.884	0.916	0.930	48	0.929	0.947	0.954
25	0.888	0.918	0.913	49	0.929	0.947	0.955
26	0.891	0.920	0.933	50	0.930	0.947	0.955

附表 B.13 经验修正系数 K, K_1, K_0 表 $n=2, m=2$

$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4	$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4
0.9	K	3.31	2.76	2.39	2.09	0.7	K	1.80	1.50	1.30	1.13
	K_0	3.55	2.94	2.55	2.28		K_0	1.93	1.6	1.39	1.24
	K_1	4.05	3.54	3.24	2.93		K_1	2.24	1.95	1.74	1.60
0.8	K	2.27	1.90	1.64	1.43	0.6	K	1.50	1.26	1.09	0.95
	K_0	2.44	2.02	1.77	1.57		K_0	1.62	1.38	1.17	1.04
	K_1	2.24	1.95	1.74	2.00		K_1	1.85	1.65	1.45	1.33

 $n=2, m=2.5$

$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4	$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4
0.9	K	2.60	2.26	2.20	1.80	0.7	K	1.60	1.39	1.23	1.11
	K_0	2.76	2.35	2.10	1.90		K_0	1.70	1.44	1.30	1.17
	K_1	3.08	2.75	2.51	2.32		K_1	1.91	1.68	1.56	1.44
0.8	K	1.93	1.67	1.49	1.33	0.6	K	1.38	1.20	1.07	0.96
	K_0	2.04	1.79	1.57	1.40		K_0	1.47	1.26	1.13	1.02
	K_1	2.28	2.06	1.85	1.71		K_1	1.65	1.46	1.33	1.26

 $n=2, m=3$

$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4	$\begin{array}{c} \alpha \\ K_i \\ R\% \end{array}$		0.1	0.2	0.3	0.4
0.9	K	2.22	1.97	1.79	1.63	0.7	K	1.48	1.31	1.19	1.09
	K_0	2.33	2.03	1.85	1.70		K_0	1.53	1.36	1.23	1.14
	K_1	2.55	2.30	2.15	2.00		K_1	1.68	1.54	1.42	1.34
0.8	K	1.73	1.53	1.39	1.27	0.6	K	1.31	1.16	1.06	0.96
	K_0	1.81	1.59	1.43	1.32		K_0	1.37	1.20	1.10	1.00
	K_1	1.96	1.79	1.66	1.57		K_1	1.50	1.36	1.27	1.19

<div><div><div>α</div><div>K_i</div><div>$R\%$</div></div></div> <div>0.1</div> <div>0.2</div> <div>0.3</div> <div>0.4</div>						<div><div><div>α</div><div>K_i</div><div>$R\%$</div></div></div> <div>0.1</div> <div>0.2</div> <div>0.3</div> <div>0.4</div>					
0.9	K	1.82	1.66	1.55	1.44	0.7	K	1.34	1.23	1.14	1.07
	K_0	1.90	1.71	1.58	1.48		K_0	1.39	1.27	1.17	1.09
	K_1	2.03	1.86	1.78	1.68		K_1	1.48	1.38	1.30	1.25
0.8	K	1.51	1.38	1.28	1.20	0.6	K	1.23	1.12	1.04	0.97
	K_0	1.57	1.42	1.31	1.22		K_0	1.26	1.15	1.07	1.00
	K_1	1.68	1.55	1.47	1.40		K_1	1.35	1.26	1.20	1.13

注：表中 n 指受试子样数； $R\%$ 为规定可靠度； m 为威布尔分布形状参数； α 为显著性水平；而 K, K_0, K_1 为公式中系数。

附表 B.14 相关系数 $\rho=0$ 时,经验相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $\hat{\rho}_\alpha$ 表

<div>α</div> <div>$n-2$</div>	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.987 69	0.996 92	0.999 507	0.999 877	0.999 999
2	0.900 0	0.950 00	0.980 00	0.990 00	0.999 00
3	0.805 4	0.878 3	0.934 33	0.958 73	0.991 16
4	0.729 3	0.811 4	0.882 2	0.917 2	0.974 06
5	0.669 4	0.754 5	0.832 9	0.874 5	0.950 74
6	0.621 5	0.706 7	0.788 7	0.834 3	0.924 93
7	0.582 2	0.666 4	0.749 8	0.797 7	0.898 2
8	0.549 4	0.631 9	0.715 5	0.764 6	0.872 1
9	0.521 4	0.602 1	0.685 1	0.734 8	0.847 1
10	0.497 3	0.576 0	0.658 1	0.707 9	0.823 3
11	0.476 2	0.552 9	0.633 9	0.683 5	0.801 0
12	0.457 5	0.532 4	0.612 0	0.661 4	0.780 0
13	0.440 9	0.513 9	0.592 3	0.641 1	0.760 3
14	0.425 9	0.497 3	0.574 2	0.622 6	0.742 0
15	0.412 4	0.482 1	0.557 7	0.605 5	0.724 6
16	0.400 0	0.468 3	0.542 5	0.589 7	0.708 4
17	0.388 7	0.455 5	0.528 5	0.575 1	0.693 2
18	0.378 3	0.443 8	0.515 5	0.561 4	0.678 7

α $n-2$	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
19	0.368 7	0.432 9	0.503 4	0.548 7	0.665 2
20	0.359 8	0.422 7	0.492 1	0.536 8	0.652 4
25	0.323 3	0.380 9	0.445 1	0.486 9	0.597 4
30	0.296 0	0.349 4	0.409 3	0.448 7	0.554 1
35	0.274 6	0.324 6	0.381 0	0.418 2	0.518 9
40	0.257 3	0.304 4	0.357 8	0.393 2	0.489 6
45	0.242 8	0.287 5	0.338 4	0.372 1	0.464 8
50	0.230 6	0.272 3	0.321 8	0.354 1	0.443 3
60	0.210 8	0.250 0	0.249 8	0.324 8	0.407 8
70	0.195 4	0.231 9	0.273 7	0.301 7	0.379 9
80	0.182 9	0.217 2	0.256 5	0.283 0	0.356 8
90	0.172 6	0.205 0	0.242 2	0.267 3	0.337 5
100	0.163 8	0.194 6	0.230 1	0.254 0	0.321 1

注: n 为样本大小, α 为显著水平。

附表 B. 15 Cramer - Von Mises 统计量 C_M^2 的临界值 $C_{M,\alpha}^2$ 表

$C_{M,\alpha}^2$ M	0.2	0.15	0.1	0.05	0.01
2	0.138	0.149	0.162	0.175	0.186
3	0.121	0.135	0.154	0.184	0.231
4	0.121	0.136	0.155	0.191	0.279
5	0.121	0.137	0.160	0.199	0.295
6	0.123	0.139	0.162	0.204	0.307
7	0.124	0.140	0.165	0.208	0.316
8	0.124	0.141	0.165	0.210	0.319
9	0.125	0.142	0.167	0.212	0.323
10	0.125	0.142	0.167	0.212	0.324
15	0.126	0.144	0.169	0.215	0.327
20	0.128	0.146	0.172	0.217	0.333
30	0.128	0.146	0.172	0.218	0.333
60	0.128	0.147	0.173	0.221	0.333
100	0.129	0.147	0.173	0.221	0.336

参考文献

- [1] 电子技术标准化研究所. 可靠性试验用表[M]. 北京:国防工业出版社,1987.
- [2] 戴树森,等. 可靠性试验及其统计分析[M]. 北京:国防工业出版社,1989.
- [3] 杨振海. 拟合优度检验[M]. 合肥:安徽教育出版社,1994.
- [4] 陈家鼎. 生存分析与可靠性[M]. 北京:北京大学出版社,2005.
- [5] 郑忠国,蒋继明. L-M 法置信下限的渐近特性[J]. 应用概率统计,1992,18(4):403-410.
- [6] 杨为民,屠庆慈,陆廷孝. 对“工程经验法”的理论分析[J]. 航空学报,1998,9(8):366-373.
- [7] 杨为民,屠庆慈,陆廷孝,等. 对“工程经验法”的理论分析及其应用[R]. 北京:北京航空航天大学,1994.
- [8] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京:中国统计出版社,1999.
- [9] 茆诗松主编. 统计手册[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [10] 曹晋华,程侃. 可靠性数学引论[M]. 修订版. 北京:高等教育出版社,2006.
- [11] 周源泉,翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社,1992.
- [12] 黄柏琴,金振宏,范大茵. 成败型系统可靠性经典精确置信限的研究[C]//系统可靠性评定方法论文集. 北京:航天部一院十四所,1987:135-144.
- [13] 郭奎. 多种试验信息情形下的系统可靠性综合评估[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院,2004.
- [14] GB 2689.1~4—81. 寿命试验与加速寿命试验方法[S]. 北京:中国标准出版社,1982.
- [15] 程侃. 寿命分布类与可靠性数学理论[M]. 北京:科学出版社,1999.
- [16] 陈家鼎. 样本空间中的序与参数的置信限[J]. 数学进展,1993,22(6):542-552.
- [17] 陈家鼎,李季,等. 两部件组成的系统的可靠度的置信下限[J]. 数学进展,2004,33(6):729-738.
- [18] 陈家鼎,孙万龙,李补喜. 关于无失效数据情形下的置信限[J]. 应用数学学报,1995,18:90-100.
- [19] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京:科学出版社,1981.
- [20] 方开泰,许建伦. 统计分布[M]. 北京:科学出版社,1987.
- [21] 郭波,武小悦,等. 系统可靠性分析[M]. 长沙:国防科学技术大学出版社,2002.
- [22] 郭奎,于丹. 系统可靠性综合 L-M 法的推广[J]. 可靠性工程,2003(4).
- [23] 贺国芳,许海宝. 可靠性数据的收集与分析[M]. 北京:国防工业出版社,1995.
- [24] 何国伟. 可靠性工程[M]. 北京:中国标准出版社,1997.
- [25] 金碧辉. 系统可靠性工程[M]. 北京:国防工业出版社,2004.
- [26] 胡昌寿,何国伟. 可靠性工程——设计、试验、分析与管理[M]. 北京:宇航出版社,1988.
- [27] 茆诗松,王玲玲. 可靠性统计[M]. 上海:华东师范大学出版社,1984.
- [28] 茆诗松,王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京:科学出版社,1997.
- [29] 茆诗松,王静龙,濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,1998.
- [30] 梅文华. 可靠性增长试验[M]. 北京:国防工业出版社,2003.
- [31] 孙山泽. 非参数统计讲义[M]. 北京:北京大学出版社,2000.
- [32] 王静龙. 可靠性增长模型的检验[R]. 上海:华东师范大学技术报告,1989.

- [33] 吴和成. 系统可靠性评定方法研究[M]. 北京:科学出版社,2006.
- [34] 徐利治主编. 现代数学手册·随机数学卷[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2000.
- [35] 徐兴忠. 信仰分布[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院,2001.
- [36] 徐兴忠,李国英. 枢轴分布簇中的 Fiducial 推断[J]. 中国科学(A辑),2006,36(3):340-360.
- [37] 闫霞. 可修系统贮存可靠性的统计评定[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院,2003.
- [38] 叶尔骅,杨纪龙. 威布尔过程的检验及其在可靠性中的应用[J]. 数理统计与应用概率,1988,3(1):31-35.
- [39] 于丹,戴树森. 复杂系统可靠性综合评估方法研究[R]. 北京:中国科学院系统所,1996.
- [40] 于丹,郭奎. 导弹系统贮存可靠性评估方法[R]. 北京:中国科学院系统所,2001.
- [41] 张志华. 加速寿命试验及其统计分析[M]. 北京:北京工业大学出版社,2002.
- [42] 张尧庭. 数据的统计处理和解释[M]. 北京:中国标准出版社,1997.
- [43] 郑忠国,金华. 串联系统可靠性的两层数据虚拟系统法置信下限[J]. 北京大学学报,1993,29(1):26-33.
- [44] 周源泉,翁朝曦. 可靠性评定[M]. 北京:科学出版社,1990.
- [45] Breipohl A M, Prairie R R, Zimmer W J. A Consideration of the Bayesian Approach in Reliability Evaluation[J]. IEEE Trans. on Reliability, 1965,14: 107-113.
- [46] Buehler R J. Confidence Intervals for the Product of Two Binomial Parameters[J]. Journal of Americans Statistical Association, 1957,52:482-493.
- [47] Chang E Y, Thompson W E. Bayes Confidence Limits for Reliability of Redundant Systems[J]. Technometrics, 1975, 17:89-93.
- [48] Chang E Y, Thompson W E. Bayes analysis of reliability of complex systems[J]. Operations Research, 1976,24:156-168.
- [49] Cornish E A, Fisher R A. The Percentile Points of Distributions Having Known Cumulants[J]. Technometrics, 1960,2:209-225.
- [50] Crow L H. On Tracking Reliability Growth[C]. Proc. of the 1975 Annual Reliability and Maintainability Symposium, 1975:438-443.
- [51] Crow L H. Confidence Interval Procedure for Reliability Growth Analysis[R]. ADA044788,1977.
- [52] Crow L H. Confidence Interval Procedure for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth [J]. Technometrics, 1982,24:67-72.
- [53] Dawid A P, Stone M. The functional model basis of fiducial inference[J]. The Annals of Statistics, 1982,1054-1067.
- [54] Duane J T. Learning Curve Approach to Reliability Monitoring[J]. IEEE Trans. on Aerospace, 1964, 21: 563-566.
- [55] Easterling R G. Approximate Confidence Limits for System Reliability[J]. JASA, 1972, 67:220-222.
- [56] Efron B. The Jackknife, the Bootstrap and other Resampling Plans[R]. Society for Industrial and Applied Mathematics,1982.
- [57] El Mawaring A H, Buehler R J. Confidence limits for the reliability of series systems[J]. JASA, 1967, 62:1452-1459.
- [58] Engelhardt M, Bain L J. Some complete and censored sampling results for the Weibull or extreme-value

- distribution[J]. *Technometrics*, 1973, 15:541-549.
- [59] Engelman L, Roach H H, Schick G J. A computer program for the exact confidence intervals[J]. *Space Technology Laboratories TR-59-0000-0075*, 1959, 1: 495-498.
- [60] Fang X, Chen J. A method to compute confidence limits with EM[R]. *Research Report of School of Mathematics Sciences, Peking University*, 1999.
- [61] Fisher R A. Inverse probability[J]. *Proc Cambridge Philos Soc*, 1930, 26:525-535.
- [62] Fisher R A, Cornish E A. Cornish-Fisher expansions for confidence limits[J]. *J. R. Statist. Soc.* 1967, B41:69-75.
- [63] Grubbs F E. Approximately fiducial bounds for the reliability of a series system for which each component has the exponential time-to-fail distribution[J]. *Technometrics*, 1971, 13(4):865-873.
- [64] IEC/TC56/164. Reliability Improvement and Growth in Equipment and Component Parts[S]. 1983.
- [65] IEC/TC56. Draft, Reliability Growth Models and Estimation Methods[S]. 1989.
- [66] Kempthorne O, Folks L. Probability, Statistics and Data Analysis[M]. The Iowa State University Press, 1971.
- [67] Lawless J E. 寿命数据中的统计模型与方法[M]. 茆诗松,等,译. 北京:中国统计出版社,1998.
- [68] Lee L, Lee S K. Some results on Inference for the Weibull Process[J]. *Technometrics*, 1978, 20:41-45.
- [69] Levenbach G J. Accelerated life testing of capacitors IRA-trans on reliability and quality control[J]. *PGRQC*, 1957, 10(1):9-20.
- [70] Lipow M, Riley J. Tables of upper confidence limits on failure probability of 1, 2 & 3 components series system[M]. Vol. 1 & 2, AD 609100, AD636718, 1960.
- [71] Lloyd D K, Lipow Madden. Reliability: Management, Methods and Mathematics [M]. Prentice-Hall, 1962.
- [72] Mann N R, Grubbs F E. Approximately optimum confidence bounds on series system reliability for exponential time to fail data[J]. *Biometrika*, 1972, 59:191-204.
- [73] Mann N R. Approximately optimum confidence bounds on series and parallel system reliability for systems with binomial subsystem data[J]. *IEEE Trans. Rel.* 1974, 23(5): 295-304.
- [74] MIL-STD-781C. Reliability Design Qualification and Production Acceptance Tests: Exponential Distribution[S]. 1977.
- [75] MIL-STD-1635(EC). Reliability Growth Testing[S]. 1978.
- [76] MIL-STD-785B. Reliability Program for Systems and Equipment Development and Production[S]. 1980.
- [77] MIL-HDBK-189. Reliability Growth Management[S]. 1981.
- [78] MIL-HDBK-781. Reliability Test Methods, Plans and Environments for Engineering Development[S]. Qualification and Production, 1987.
- [79] Preston P F. Confidence Limits for System Reliability[R]. AD/A-C47533, 1976.
- [80] Samuel Kotz, 吴喜之. 现代贝叶斯统计学[M]. 北京:中国统计出版社, 2000.
- [81] Smith D R, Springer M D. Bayesian limits for the reliability of pass/fail parallel units[J]. *IEEE Trans. Rel.* 1976, R-25:213-216.

- [82] Spencer F W, Easterling R G. Lower confidence bounds on system reliability using component data: Maximus methodology[R]. SAND-84-1199C, DE84-012813, CONF-8406135-1,1986.
- [83] Springer M D, Thompson W E. Bayesian confidence limits for the product of N binomial parameters[J]. Biometrika, 1966, 53:611-613.
- [84] Springer M D, Thompson W E. Bayesian confidence limits for the reliability of cascade exponential subsystem[J]. IEEE Trans. Rel. 1967, 16(2): 86-89.
- [85] Springer M D, Thompson W E. Bayesian confidence limits of reliability of redundant systems when tests are terminated at first failure[J]. Technometrics, 1968, 10(1):27-36.
- [86] Stephenson A R, Mardo J G, Cole P V Z. A tri-service Bayesian approach to a nuclear weapons reliability assessment[R]. AD746260, 1972.
- [87] Thompson W E, Haynes R D. On the reliability, availability and Bayes confidence intervals for multi-component systems[J]. Naval Res. Log. Quart. , 1980,27:345-358.
- [88] Winterbottom A. Lower Confidence Limits for Series System Reliability from Binomial subsystem data [J]. JASA, 1974, 69:782-788.
- [89] Winterbottom A. Cornishi-Fisher Expansions for Confidence Limits[J]. J. R. Statist. Soc. B, 1979,41: 69-75.
- [90] Winterbottom A. Asymptotic Expansions to Improve Large Sample Confidence Intervals for System Reliability[J]. Biometrika, 1980, 67:351-357.